Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathem. Math P 327

Matheſis. Algebra generalis. 228.

Digitized by Google

Johann Friderich Malers
weil. Hochfürstl. Markgräfl. Baden-Durlachischen Kirchenraths
und Rectors des Gymnasii illustr. zu Carlsruhe

Algebra

zum Gebrauch hoher und niederer Schulen.

Durchgesehen, verbessert, vermehrt und mit einer neuen Vorrede begleitet

von

Abraham Gotthelf Kästner.
Königl. Großbrittanischem Hofrath, auch Professorn der Physik und Mathematik zu Göttingen.

Carlsruhe,
gedruckt und verlegt bey Michael Macklot,
Hochfürstl. Markgräfl. Badischen Hofbuchhändler, 1774.

Digitized by Google

Comparauit

P. STEPHANUS WIEST ordinem Ciſtercienſium Profeſſus in Alterſpach, Philoſophiae et SS. Theologiae Doctor, Sereniſſ. Principis et Electoris Palatino-Bauarici Conſiliarius Eccleſ. Actualis, Theologiae dogmaticae, Patrologiae, et Hiſtoriae litterariae Theologicae in Alma Catholica Vniuerſitate Ingolſtadienſi Profeſſor publicus ordinarius.

Bayerische Staatsbibliothek München

178

Digitized by Google

Vorrede.

So schön die Algebra, und so gros ihr Nutzen nicht nur in der ganzen Mathematik, sondern auch in dem gemeinen Leben ist, und so sehr sie dem menschlichen Verstande Ehre macht, da sie dessen Erkenntniß auf den höchsten Gipfel erhebet: so viele Anstösse finden gleichwol die Anfänger bey deren Erlernung. Einigen komt diese Art zu rechnen gar zu schwer vor; andere können sich keinen Begriff machen, was doch die Buchstaben bedeuten sollen; noch andere halten sie für eine unnütze Grille, die höchstens in denen Theilen der Mathemathik ihren Nutzen habe, welche in dem gemeinen Leben nicht zu gebrauchen sind; besonders sey sie zum Rechnen gar nicht nöthig, und es lasse sich alles durch die gemeine Rechenkunst berechnen.

Digitized by Google

berechnen. Alle diese Umstände und Vorurtheile habe ich bey verschiedenen meiner Zuhörer, denen ich, nebst den übrigen Theilen der Mathematik, auch die Algebra erklärte, von Zeit zu Zeit wahrgenommen.

Um dieser Ursache willen habe ich meinen lieben Zuhörern zu Gefallen diese wenige Blätter zusammen geschrieben. Ich habe mich bemühet, so wol die Buchstaben-Rechenkunst, als die algebraische Auflösung, so leicht, so deutlich und so sinnlich zu machen, daß ich glaube, ein Kopf, der nur ein wenig aufgeklärt ist, und die gemeine Rechenkunst inne hat, werde sich auch ohne Anweisung darein finden können. Hiernächst habe theils aus verschiedenen andern Schriften, die aber Kürze halber anzuführen nicht für nöthig erachtet, theils aus eigenen Einfällen Aufgaben zusammen gelesen, um so wol den Anfängern durch viele Uebungen eine Fertigkeit beyzubringen, als auch sie durch viele Beyspiele zu überzeugen, theils, daß man auch in denen Rechnungen, so in dem gemeinen Leben vorkommen, öfters ohne Erkänntniß der Algebra nicht fortkommen könne; theils aber, daß die Algebra auch in denen Fällen, wo die gemeine Rechenkunst zwar hinreichet, doch vortrefliche Leichtigkeit und Vortheile verschaffe.

Meine Absicht gieng nicht allein dahin, einen Unterricht zu geben, wie diejenige, meistens nur zur Lust gemachte arithmethische Fragen, aufzulösen seyen, die nach der gemeinen Rechenkunst nicht aufgelöset werden können: sondern ich

brauchte vielmehr jede Gelegenheit, die Vortheile, die man in höheren mathematischen Dingen, bey Anwendung der Algebra, nöthig hat, unvermerkt und nach und nach denen Gemüthern der Anfänger einzuflösen, und dadurch eine Lust zu erwecken, dabey nicht stille zu stehen, sondern immer tiefer in die angenehme Geheimnisse der Mathematik einzudringen und die tiefsinnigen Arbeiten der grossen und um die Mathematik verdienten Männer durchzugehen. Meine Absicht hat auch bey vielen meiner Zuhörer die erwünschte Erfüllung gehabt, auch bey solchen, denen ich von Anfang mit vieler Mühe, will nicht sagen einen kleinen Geschmack beybringen, sondern nur ihre Abneigung benehmen mußte.

Ich war niemals gesonnen, diese wenige Blätter, die ich zu meinem Vergnügen und Nutzen meiner Zuhörer geschrieben, dem Druck zu überlassen; theils weil ich die ohne dem mit Büchern überlädene Welt nicht gern mit noch mehrern belästigen wolte; theils weil ich in denenselben nichts neues, sondern nur Milchspeise auf eine faßliche und leichte Art vorgetragen hatte. Allein ich wurde von vielen ersucht, sie dem Druck zu überlassen, weil sie glaubten, es würden andere, um der Leichtigkeit willen, eben so wol Lust zu dieser so nützlichen Wissenschaft bekommen, als meine Zuhörer, und eben so viel Nutzen, als sie, daraus schöpfen; Ich gab also ihrem Ansinnen um so mehr Platz, weil diese wenige Blätter viel zu klein sind, als daß sie die Welt belästigen solten. Ob die übrige Stücke, die zur Algebra gehören, auf gleiche Art erscheinen werden, weiß ich selber nicht. Solte die gütige Aufnahme

nahme dieser Blätter mich versichern, daß denen Anfängern einiger Nutzen verschaft werde, würde mich, um ihnen nützlich zu seyn, die Mühe nicht dauren, wiewol dergleichen Arbeit mehr eine Lust als Mühe zu nennen. Und dieses ist es, was ich kürzlich zum voraus erinnern sollen.

Digitized by Google

Vorrede zur dritten Ausgabe.

Der Verfaſſer gegenwärtigen Werks ſchien mir viel gewagt zu haben, daß er eine Algebra ſelbſt mit zum Gebrauch der niedern Schulen verfaßt hatte, da ſolche Anleitungen doch auf vielen der hohen ziemlich entbehrlich ſind. Er muß indeſſen ſeine Abſicht erreicht haben, weil nach der erſten Ausgabe von 1761 jezt eine neue verlangt wird. Wegen der Deutlichkeit im Vortrag der Regeln, und der mannigfaltigen nicht übel gewählten Exempel, zur Uebung, hielt ich das Werk unter der Geſtalt, in welcher es zuerſt heraus gekommen iſt, Anfängern für ſehr nützlich, und ich habe davon auf dieſe Art in den Göttingiſchen gelehrten Anzeigen geurtheilet. Ich wollte daher die Freyheit, die man mir jezo darüber ertheilte, nur an ſolchen Stellen brauchen, wo, nach meiner Einſicht, Veränderungen höchſtnothwendig waren.

Eine der vornehmſten iſt bey dem 130 §. die Auflöſungen der quadratiſchen Gleichungen, die ich deutlicher und umſtändlicher vortragen mußte. Die Auflöſungen der 52; 53; 54 und 55 Aufgaben habe ich auf die allgemeine Formel, welche nach den quadratiſchen Gleichungen aufgelöſet werden, gebracht, ſo daß man nur ſtatt der Buchſtaben die Zahlen ſetzt. Statt des 156; 157 §. der alten Ausgabe ſind hier andere zu finden, in denen angezeigt wird, warum eine Gleichung oft mehr als eine Wurzel hat. Des 170 §. Auflöſung iſt verbeſſert, die Summirung unendlicher geometriſcher Reihen des 196 — 201 §§. auf die

gehörige

gehörige Art vorgetragen, imgleichen die Summirung der Reihen von Potenzen des 276 §. verbessert worden. Kleinere Zusätze und Verbesserungen übergehe ich.

Sehr viel Aufgaben in diesem Werke zeigen den Nutzen der Algebra bey ökonomischen oder andern, nach jedermanns Geständnisse, brauchbaren Untersuchungen, z. E die 79 u. f. die 86; 88; u.d.g.m. Ich hätte gewünscht, gleich nützliche statt einiger andern zu setzen, die nur zur Uebung im Rechnen dienen. Ich habe dergleichen etwas in der 35 Aufgabe bewerkstelliget, und das, was zuvor in der Aufgabe, die diese Zahl hatte, vorkam, zur achten, wo es hingehörte, gebracht.

Ganze Aufgaben mit andern zu vertauschen, fand ich deswegen nicht für gut, weil es vielleicht manchen, die dieses Buch bisher gebraucht haben, beschwerlich gewesen wäre. Ich fand auch keine Aufgaben, die ihre Stelle nicht wenigstens dadurch verdienten, daß sie dem Anfänger Gelegenheit verschafften, eine Fertigkeit in den algebraischen Rechnungen zu erlangen. Und so gibt dieses Buch eine sehr gute Vorbereitung zu dem Gebrauch der Algebra, die in der Geometrie und überall, wo sich Mathematik anbringen läßt, so unentbehrlich ist. Der Verleger hat dieser Schrift das nemliche Format gegeben, welches die von mir im Dec. 1766 ebenfalls verbesserte und 1767 neu gedruckte Malerische Geometrie erhalten, damit man beyde, nach Belieben, in einen Band binden könne. Göttingen im May 1768.

Abraham Gotthelf Kästner,

Kön. Großbr. Hofrath und Prof. der Physik und Mathematik.

Von

Von der

Algebra.

Die 1. Erklärung.

§. 1.

Eine Gröſſe iſt, was ſich mehren und minderen läßt, und doch noch unter die vorige Art der Dinge gehört.

Anmerkung.

§. 2. Eine Linie, ſie mag verlängert oder verkürzet werden, bleibt doch noch eine Linie; die Zahl 7 iſt noch eine Zahl, man mag davon oder dazu thun; desgleichen die Kraft einer Feder in einer Uhr bleibt eine Kraft, ſie ſeye gleich ſtärker oder ſchwächer, u. ſ. w. Hingegen kan ein mathematiſches Punct weder gröſſer noch kleiner ſeyn, darum es auch keine Gröſſe hat. Man begreift alſo unter den Gröſſen, Zahlen, Linien, Flächen, Körper, Kräften, Zeiten, Geſchwindigkeiten, u. ſ. w.

Digitized by Google

Die 2. Erklärung.

§. 3. Eine Gleichung oder Aequation wird genennet, wenn eine Grösse auf zweyerley Art ausgedrukt wird.

Anmerkung.

§. 4. Als, man kan die Zahl 10 ausdrucken, als seye sie die Summe von 7 und 3, ingleichem als den Unterschied zwischen 12 und 2. Wenn ich denn spreche: die Summe von 7 und 3 ist gleich dem Unterschied von 12 und 2, oder, wie unten (§. 16.) vorkommen wird, $7 + 3 = 12 - 2$: so habe ich eine Gleichung.

Die 3. Erklärung.

§. 5. Die Algebra ist eine Wissenschaft aus bekannten unbekannte Grössen vermittelst Gleichungen durch Rechnen zu finden.

Der 1. Zusatz.

§. 6. Es ist demnach die Algebra nur in der Art zu rechnen, nemlich durch Gleichungen von der gemeinen Rechenkunst unterschieden. Und ein jeder, der sich an die Algebram macht, muß vorher das gemeine Rechnen verstehen.

Der 2. Zusatz.

§. 7. Es ist ferner klar, daß man bey einer jeden vorgegebenen algebraischen Aufgabe sich vor allen Dingen um eine Gleichung bekümmern müsse.

Der

Digitized by Google

Der 3. Zusatz.

§. 8. Eben so erhellet, da in einer jeden solchen Aufgabe bekannte und unbekannte Grössen vorkommen (§. 5.), daß man entweder eine bekannte oder unbekannte auf zweyerley Art ausdrücken müsse. (§. 3.)

Anmerkung.

§. 9. Die Erfahrung wird uns bald lehren, wie nützlich es seye, an statt der Zahlen allgemeine Zeichen oder Buchstaben zu brauchen, ob es gleich in der Algebra nicht unumgänglich nöthig ist. Dahero müssen wir, ehe wir die Algebra selber vor die Hand nehmen, vorhero die Buchstabenrechenkunst uns bekannt machen.

Die 4. Erklärung.

§. 10. Die Buchstabenrechenkunst ist eine Wissenschaft, an statt der gewöhnlichen Ziffern mit allgemeinen Zeichen zu rechnen.

Anmerkung.

§. 11. Damit man das Gedächtnis nicht mit neuen Zeichen beschweren dörfe, bedienet man sich der gewöhnlichen kleinen lateinischen sogenannten Cursivbuchstaben, die um deswillen allgemeine Zeichen heissen, weil man alles damit bezeichnen kan, als z. E. *a* kan eine jede Zahl, als 5, 7, 10, 1000, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, ꝛc. eine Linie, einen Körper, eine Kraft, eine Zeit, u. s. w. bedeuten. Man darf sich aber dabey nicht irre machen lassen, als ob man mit Dingen in der Buchstabenrechenkunst umgehe, davon man sich keinen Begrif machen könne, weil man ja nicht wisse, was *a*, *b* ꝛc.

bedeute, und wenn man lang wisse, wie man *a* und *b* addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren solle, so wisse man doch nicht, was man habe, wenn man fertig seye. Denn gleichwie man bey Erlernung des Einmaleins noch nicht weiß, ob 2mal 2 vier Ducaten, 4 Kreutzer, 4 Kühe, 4 Pferde, ꝛc. seyen, sondern zu frieden ist zu wissen, daß es 4 sind: so hat man bey Erlernung der Buchstabenrechnung auch nicht nöthig zu wissen, was *a*, *b*, *x* ꝛc. bedeute; komt es hernach zur Ausübung, so wird es sich schon zeigen, was ein jeder Buchstabe vor eine Bedeutung habe, wie es sich bey dem Einmaleins in der Anwendung zeiget. Es hat also die Buchstabenrechnung vor der gemeinen diesen Vorzug, daß sie allgemeiner ist, und nicht nur Zahlen, sondern auch alle Grössen überhaupt berechnen lehret. Anderer Vorzüge dermalen zu geschweigen, die sich unten bey der Anwendung handgreiflich zeigen werden.

Der 1. willkührliche Satz.

§. 12. Die bekannten Grössen werden mit den ersten Buchstaben *a*, *b*, *c*, ꝛc. die unbekannten mit den letzten *x*, *y*, *z* benennet.

Die 1. Anmerkung.

§. 13. Weil man in der algebraischen Rechnung beständig Acht auf die bekannten und unbekannten Grössen haben muß; so war es nöthig, solche von einander zu unterscheiden; und, damit man dieser Zeichen gewohnt werde, behält man immer den gemeldeten Unterschied der Buchstaben.

Die 2. Anmerkung.

§. 14. Es verstehet sich von selbsten, daß in einem Exempel einerley Buchstaben nur einerley Grössen andeuten müs-

müſſen; als, wenn *a* die Summe zweyer Zahlen, eine gewiſſe Linie, ein gewiſſes Gewicht, ꝛc. bedeutet: ſo muß es im ganzen Exempel keine andere Bedeutung haben.

Die 3. Anmerkung.

§. 15. Eben ſo muß man zwey Gröſſen, da eine durch die andere ausgedruckt werden kan, nicht mit zweyerley Buchſtaben benennen, als wenn eine nochmal ſo gros als die andere iſt, die ſchon *a* heißt, muß ſie nicht *b*, ſondern 2 *a*, u. ſ. w. heiſſen, und wenn eine *b* heißt, und die andere um 3 mehr iſt, muß ſie $b + 3$ heiſſen.

Der 2. willkührliche Satz.

§. 16. Das Zeichen der Addition iſt $+$, ſo mit plus ausgeſprochen wird, als $a + b$, das heißt *a plus b*, das iſt, *b* ſolle zu *a* addirt werden; hingegen iſt das Zeichen der Subtraction $-$, ſo minus ausgeſprochen wird, als *a* und $-d$ heißt *a* minus *d*, das iſt, *d* ſolle von *a* ſubtrahirt werden.

Der 3. willkührliche Satz.

§. 17. Wenn Buchſtaben ſollen multiplicirt werden, ſo ſetzet man ſie nur zuſammen, als *ab* bedeutet, *a* ſoll mit *b* multiplicirt ſeyn. Da dieſes bey Zahlen eine Verwirrung machen könnte, ſo ſetzt man ein Strichlein, oder einen Punct, oder ein Andreascreutz $\times$ darzwiſchen, als 3, 5, oder 3, 5 oder 3×5, welches auch in gewiſſen Fällen bey den Buchſtaben zu geſchehen pfleget.

Zuſatz.

§. 18. Es iſt aus der gemeinen Rechenkunſt bekannt, daß, wenn ein Product mit einem Factor dividirt

vidirt wird, so komt der andere Factor heraus, daher wenn $a\,b$ mit a dividirt wird, komt b, das ist, wenn der Divisor in dem Dividendo vorhanden ist, wird er nur weggenommen, so bleibt der Quotient; als b in $c\,b\,d$ dividirt, gibt $c\,d$.

Der 4. willkührliche Satz.

§. 19. Wenn angezeiget werden soll, daß mehrere Buchstaben mit einem sollen multiplicirt werden, so schliesset man die mehrere nur in zwey Klammern ein, und verfahret wie §. 17. gemeldet. Als wenn $a+b-c$ mit d multiplicirt werden soll, stehet es also: $(a+b-c)\,d$ oder $(a+b-c),\,d$ oder $(a+b-c).\,d$ oder $(a+b-c)\times d$. Sollen aber mehrere mit mehrern multiplicirt werden, so schliesset man beyde mit oder ohne darzwischen gesetzte Zeichen ein, als: $(a-x+d)\,(b+c-f)$ oder $(a-x+d)\times(b+c-f)$ u. s. w.

Anmerkung.

§. 20. Das Product aus $a+b-c$ in d könnte wohl nach §. 17. also gezeichnet werden, $a\,d+b\,d-c\,d$; allein es gibt Fälle, da man von der Zeichnung nach §. 19. Vortheile hat, welches sich unten zeigen wird, dahero muß man sich diese auch wohl bekannt machen, und, wenn einem z. E. $a\,c+b\,c$ vorkomt, wissen, daß man es auch $(a+b)\,c$ zeichnen könne.

Der 5. willkührliche Satz.

§. 21. Die Division wird also gezeichnet, daß der Divisor unter den Dividendum gesetzt wird, wie

wie ein Bruch oder hinter denſelben und zwey Puncte darzwiſchen, als: $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ bedeutet, a ſoll mit b dividiret werden. Sollen aber mehrere mit einem oder mehrern Buchſtaben dividiret werden, werden ſie wie bey dem multipliciren eingeſchloſſen und zwey Puncte darzwiſchen geſetzt, oder in Geſtalt des Bruchs, daß der Strich unter alle Buchſtaben gezogen wird, die dividiret werden ſollen, als: $(a+b-c):d$ oder $(a+b-c):(d+g)$ oder $\frac{a+b-c}{d}$ oder $\frac{a+b-c}{d+g}$

Die 5. Erklärung.

§. 22. Die Gröſſen, die das Zeichen + haben, werden poſitive; die aber das Zeichen — haben, negative Gröſſen genennet.

Anmerkung.

§. 23. Es erleichtert die Buchſtabenrechenkunſt ungemein, wenn man ſich den rechten Begrif von den poſitiven und negativen Gröſſen macht, welches ſich am leichteſten durch Exempel thun läſſet. Wann ich nichts habe, und ſoll doch 5 fl. bezahlen, ſo iſt ſolches nicht möglich, weil von nichts 5 fl. nicht abgezogen werden können, darum kommen die 5 fl. mit dem Zeichen — 5 fl. alſo iſt in dieſem Fall eine negative Gröſſe eben ſo viel, als eine Schuld, und hingegen eine poſitive ein Kapital. Eben ſo, wenn ich von hier gegen Frankfurt zu 10 Meilen reiſe, und 4 wieder

zurück, so müssen die 4 von 10 abgezogen werden, wenn ich wissen will, wie weit ich von hier seye; sage ich aber, ich seye 15 Meilen zurück gegangen, so solten zwar auch diese 15 von 10 abgezogen werden; da es aber nicht geschehen kan, sondern nur 10, so müssen die übrige 5 gezeichnet werden —— 5, das ist, 5 Meilen von dem Ort meines Aufenthalts in Absicht auf Frankfurt zurück. Wenn ich demnach sage, die Sonne seye —— 5 Grad unter dem Horizont, so heißt es eben so viel, als + 5 Grad über demselben, so ist auch —— 3 Stunden Nachmittag + 3 Stunden Vormittag. Hieraus erhellet nun genugsam, daß die positiven und negativen Grössen gar nicht von verschiedener Natur oder heterogen seyn, sondern daß, weil sie in besonderer Relation auf ein gewisses Ding betrachtet werden, nur eines das andere aufhebt. Als 5 fl. bleiben, was sie sind, sie mögen Schulden oder Kapital seyn; sind sie Schulden, so sind sie in Relation auf mich negativ, in Absicht des Glaubigers aber positiv. Wenn ich zwischen zweyen Städten A und B bin, und ich sage, ich reise —— 3 Meilen gegen A, so sind es zwar 3 Meilen, sie gehen aber nicht gegen A, sondern gegen B, und sind demnach gegen A negativ, gegen B aber positiv. Auf diese Art wird sich verstehen lassen, was das zu bedeuten habe, wenn ich eine Perpendicularlinie vor mir hätte, und würde mir aufgegeben, ich solte algebraisch finden, wie weit ein gewisses Punct zur rechten Hand, davon entfernet wäre, und ich fände, es wäre —— 4 Schuh, daß solches Punct nicht zur Rechten der Linie, sondern zur Linken seye. Vielleicht werden sich die Anfänger die positiven Grössen am besten unter Kapitalien, die negativen unter Schulden oder einem Mangel in Absicht auf das, so davon subtrahiret werden solte, vorstellen können.

Der

Der 6. willkührliche Satz.

§. 24. Wenn man anzeigen soll, daß zwey Grössen einander gleich seyn, so hat man dieses Zeichen = oder bey einigen Mathematicis ∞, als 5 = 3 + 2 heißt 5 ist äqual 3 + 2. Daß eine grösser seye als die andere, wird gezeichnet > kleiner aber < als 8 > 5 heißt 8 ist grösser als 5, hingegen 3 < 4, 3 ist kleiner als 4.

Der 1. Grundsatz.

§. 25. Positive Grössen zu positiven Grössen addirt, geben positive; hingegen negative zu negativen, geben negative. Als + 7 und + 3 = + 10, —— 5 und —— 8 = —— 13.

Der 2. Grundsatz.

§. 26. Wenn gleich grosse positive und negative Grössen zusammen addirt werden, heben sie einander auf, oder geben nichts, als + 7 —— 7 = 0.

Zusatz.

§. 27. Wenn demnach ungleiche positive und negative Grössen addirt werden, so macht die kleinere von der grösseren so viel zu nichts, als sie selber ist, und das übrige bleibt. Ist also die grössere positiv, so bleibt eine positive; ist sie aber negativ, so bleibt eine negative übrig, als + 9 zu —— 3 addirt, gibt + 6, und —— 8 zu + 4 addirt, gibt —— 4.

Digitized by Google

Der 3. Grundsatz.

§. 28. Eine kleinere positive von einer gröſſeren positiven Gröſſe abgezogen, läßt eine positive, und eine kleinere negative von einer gröſſern negativen läßt auch eine negative übrig. Als von + 15 abgezogen + 7, bleibt + 8, hingegen von — 13 abgezogen — 5, bleibt — 8.

Der 4. Grundsatz.

§. 29. Wenn eine positive Gröſſe subtrahirt wird, so wird die Gröſſe, von der sie subtrahirt wird, um so viel weniger, als von + 12 abgezogen + 3, gibt + 9.

Der 1. Zusatz.

§. 30. Wenn also eine positive Gröſſe von einer negativen abgezogen werden soll, so wird der Mangel um so viel gröſſer. Als wenn ich — 5 habe, und solle + 3 noch davon abziehen, so bleibt erstlich der Mangel — 5, und 3 solle noch dazu weggethan werden, so steigt der Mangel auf 8 oder gibt — 8.

Der 2. Zusatz.

§. 31. Soll eine gröſſere positive Gröſſe von einer kleinern abgezogen werden, so kan nicht mehr, als die kleinere beträgt, abgezogen werden, und das übrige wird eine negative Gröſſe. Als von + 3 abgezogen + 5, gibt — 2. Denn wenn ich nur 3 fl. habe, und soll 5 bezahlen, bleibe ich 2 schuldig.

Der

Digitized by Google

Der 3. Zusatz.

§. 32. Aus diesen zweyen Zusätzen erhellet, daß wenn eine positive Grösse abgezogen werden solle, es eben so viel ist, als ob sie zur negativen gemacht, und addirt würde.

Der 1. Lehrsatz.

§. 33. Wenn eine negative Grösse subtrahirt wird, so wird die, von welcher sie subtrahirt wird, um so viel grösser.

Beweiß.

Es soll von einer Grösse, die indessen a heissen mag, eine negative, nemlich $-b$ abgezogen werden, so stelle man sich vor, es werde zu a addirt b, und eben dieses b wieder subtrahirt, so bleibet das a, was es vorher gewesen, (§. 26.) und stehet also $a+b-b$, subtrahirt, oder nimmt man nun $-b$ weg, so muß $a+b$ übrig bleiben, folglich ist a um b vermehret worden. W. z. E.

Anmerkung.

§. 34. Dieses leichter zu begreiffen, so will ich setzen, ich hätte 12 fl. im Vermögen, wäre aber 12 fl. schuldig, so hätte ich eigentlich nichts, es würde aber die Schuld von 12 fl. subtrahirt oder aufgehoben, so blieben mir meine 12 fl. im Beutel, weil die aufgehobene Schuld vernichtet, und folglich nicht mehr bezahlt werden dürfte; und ist also eben so viel, als ob ich, durch Subtraction der Schuld, 12 fl. bekommen hätte.

Der

Der 1. Zusatz.

§. 35. Wird also eine negative Grösse abgezogen, so ist es eben so viel, als würde sie addirt. Als — 2 von + 5 subtrahirt, gibt + 7.

Der 2. Zusatz.

§. 36. Wenn eine grössere negative Grösse von einer kleinern negativen abgezogen werden soll, so kan nicht mehr abgezogen werden, als die kleinere selber ist, und das übrige wird positiv, als — 10 von — 7 gibt + 3. Denn es ist eben so viel, als ich wäre 7 fl. schuldig, und jemand machte mir eine Schuld von 10 fl. zu nichts, so bliebe mir noch 3 fl. gut stehen.

Der 3. Zusatz.

§. 37. Hieraus erhellet, daß, wenn eine negative Grösse abgezogen werden soll, es eben so viel sey, als wenn sie in eine positive verwandelt und addirt würde.

Der 2. Lehrsatz.

§. 38. Wann mit einer positiven Grösse multiplicirt wird, so ist es eben so viel, als die zu multiplicirende Grösse werde so vielmal addirt, als die positive Grösse Einheiten hat; wird aber mit einer negativen multiplicirt, so wird die zu multiplicirende so vielmal subtrahirt.

Beweiß.

Da die zu multiplicirende Grösse so vielmal genommen wird, als der Multiplicator Einheiten hat; so

ist

ist klar, daß wenn der Multiplicator positiv ist, auch die multiplicirende Grösse wirklich etlichmal zu sich selbst addiret werde. Ist aber der Multiplicator negativ, so muß zwar der Multiplicandus auch so vielmal genommen werden, als der Multiplicator Einheiten hatte, aber negativ, das ist, abgezogen werden, folglich ist es eben so viel, als ob der Multiplicandus so vielmal abgezogen würde, als der Multiplicator Einheiten hat. W. z. E.

Wäre die Zahl, mit der man multiplicirt, keine ganze Zahl, z. E. solte man 7 mit $\frac{3}{4}$ multipliciren, so erhellet, daß dieses zwar nicht heißt, die 7 etlichemal zu sich selbst addiren, aber daß doch niemand den Ausdruck undeutlich finden wird: die 7; $\frac{3}{4}$mal nehmen, das ist, sie so oft nehmen, so oft 1 in $\frac{3}{4}$ enthalten ist; es ist aber in $\frac{3}{4}$ die 1 nicht ganz, sondern nur $\frac{3}{4}$mal enthalten.

Solte man 7 mit $-\frac{3}{4}$ multipliciren, so hieße dieses die 7 so oft nehmen, wie oft 1 in $\frac{3}{4}$ enthalten ist. Es ist aber in $-\frac{3}{4}$ die Einheit $\frac{3}{4}$mal abgezogen oder gewöhnlicher zu reden, es sind $\frac{3}{4}$ der Einheit abgezogen, also soll man auch $\frac{3}{4}$ von der 7 abziehen, oder man erhält $-\frac{7.3}{4} = -\frac{21}{4}$.

Der 1. Zusatz.

§. 39. Wird also $+a$ mit $+b$ multiplicirt, so gibt es $+ab$; denn soll die positive Grösse a etlichmal zu sich selber addirt werden, so muß sie positiv bleiben, (§. 25. §. 17. §. 38.); $-a$ aber mit $+b$ gibt $-ab$, weil eine negative Grösse etlichmal zu sich selber addirt, negativ bleibet. (§. 25. §. 17. §. 38.).

Der

Der 2. Zusatz.

§. 40. Wird $+a$ mit $--b$ multiplicirt, so gibt es $--ab$, denn die positive Grösse a wird etlichmal subtrahirt, (§. 17 29. 38) $--a$ mit $--b$ gibt $+ab$, weil die negative Grösse $--a$ etlichmal subtrahirt wird. (§. 35. §. 17. §. 38.)

Der 3. Zusatz.

§. 41. Folglich geben einerley Zeichen, ($+$ und $+$ desgleichen $--$ und $--$) im multipliciren $+$; verschiedene Zeichen aber, ($+$ und $--$) geben $--$ (§. 39. 40.).

Der 4. Zusatz.

§. 42. Wenn das Product mit dem Multiplicator dividirt wird, so komt der Multiplicandus als Quotient heraus; Da nun

1.)	2.)	3.)	4.)
$+a$ mal $+b$	$-a$ mal $+b$	$+a$ mal $-b$	$-a$ mal $-b$
$+ab$	$-ab$	$-ab$	$+ab$

diese vier Fälle durch die Multiplication diese Producte bringen (§. 39. 40.), so muß im ersten Fall $+ab$ mit $+b$ dividirt $+a$ geben, im 2 Fall $--ab$ mit $+b$, geben $--a$, im 3ten Fall $--ab$ mit $--b$, geben $+a$, und endlich im 4ten Fall $+ab$ mit $--b$ heraus bringen $--a$, und folglich auch bey dem dividiren einerley Zeichen $+$, verschiedene aber $-$ geben.

Die

Die 1. Aufgabe.

§. 43. Einerley Gröſſen mit einerley und verschiedenen Zeichen zu addiren.

Auflösung und Beweiß.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zählet sie, wie in der gemeinen Rechenkunst, zusammen. (§. 25.)

2. Sind die Zeichen verschieden, so ziehet die kleinere von der gröſſern ab, und gebet der Ueberbliebenen das Zeichen der gröſſeren, so habt ihr die Summe. (§. 27.) W. z. th. w.

Exempel.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 5a & - & 3b & + & 4c & - & 7d & - & 3f \\ 2a & + & 3b & - & 5c & - & 2d & + & 6f \\ \hline 7a & & & - & c & - & 9d & + & 3f \end{array}$$

Anmerkung.

§. 44. Es ist von sich selbsten klar, daß, wenn verschiedene Buchstaben zusammen addirt werden sollen, solche mit ihren Zeichen nur neben einander gesetzt werden müssen. Als $+a$ zu $-3b$ addirt, gibt $+a-3b$; und $2a$ zu $+b$ addirt, gibt $2a+b$.

Die 2. Aufgabe.

§. 45. Einerley Gröſſen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auf-

Auflösung und Beweiß.

Stellet euch vor, es haben die abzuziehende Gröſſen verkehrte Zeichen, nemlich an statt + stehe —, und an statt — stehe +, und addirt, wie §. 43. gelehrt worden, so habt ihr den Rest (§. 32. 35.). W. z. th. w.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 7a + 3b - 2c - 4f + 2g - 4x \\ 3a - 2b - 4c - 2f + 4g + 3x \\ \hline 4a + 5b + 2c - 2f - 2g - 7x \end{array}$$

Anmerkung.

§. 46. Sollen ungleiche Buchstaben von einander subtrahirt werden, so setzet man nur die abzuziehende mit dem verkehrten Zeichen darneben, als $+b$ von $+a$ gibt $a - b$, $-b$ von $+a$ gibt $a + b$. (§. 32. 35.)

Die 3. Aufgabe.

§. 47. Gröſſen mit einerley und verschiedenen Zeichen mit einander zu multipliciren.

Auflösung und Beweiß.

Multipliciret, wie in Zahlen, und setzet die Buchstaben aneinander, (§. 17.) nur merket, daß einerley Zeichen +, verschiedene aber — geben. (§. 41.).

Exem-

Exempel.

$a+b-d$	$5a-2b-d$
$a-b-d$	$2a+3b-2d$
$-ad-bd+dd$	$-10ad+4bd+2dd$
$-ab-bb+bd$	$15ab-6bb-3bd$
$aa+ab-ad$	$10aa-4ab-2ad$
$aa-2ad-bb+dd$	$10aa+11ab-12ad-6bb+bd+2dd$

Die 4. Aufgabe.

§. 48. Gröſſen mit einerley und verſchiedenen Zeichen mit einander zu dividiren.

Auflöſung und Beweiß.

Laſſen ſich die Gröſſen dividiren, ſo dividiret, wie in Zahlen, und thut den oder die Buchſtaben des Diviſors von dem Dividendo, und behaltet den oder die übrigen zum Quotienten. (§. 18.). Kan die Diviſion nicht wirklich geſchehen, ſo verrichtet ſie nur durch Zeichen. (§. 21.). Wobey noch zu merken, daß das unter ſich Dividiren bey den Buchſtaben viel bequemer.

Exempel.

1) $(a+b-d)\ aa-2ad-bb+dd\ (a-b-d$

$aa+ab-ad$

$-ab-ad-bb+dd$

$-ab-bb+bd$

$-ad-bd+dd$

$-ad-bd+dd$

2) $2a+3b-2d)10aa+11ab-12ad-6bb+bd+2dd(5a-2b-d$

$10aa+15ab-10ad$

$-4ab-2ad-6bb+bd+2dd$

$-4ab-6bb+3bd$

$-2ad-3bd+2dd$

$-2ad-3bd+2dd$

0

3) $a-b)\ aaa-bbb\ (aa+ab+bb$

$aaa-aab$

$+\ aab-6bbb$

$aab-abb$

$+\ abb-bbb$

$abb-bbb$

0

4) $c+d)\ cc-dd\ (c-d$

$cc+cd$

$-cd-dd$

$-cd-dd$

0

Die 1. Anmerkung.

§. 49. Die Buchstaben haben keine Bedeutung von der Stelle, wie die Zahlen, und $+ab$ gilt einerley, es mag vornen, hinten, oder in der Mitte stehen. Darum darf man sich hier an keine Ordnung binden, und man kan den Quo-

Quotient nehmen, wo man ihn findet, welches auch bey dem Subtrahiren des Products aus dem Quotienten in den Diviſorem ſtatt hat. Damit aber die Anfänger ſehen, wie die Diviſion geſchehe, ſo wollen wir das erſte Exempel etwas erläutern. Sprechet: a in aa hab ich a, (§. 18.) ſetzet a in die Stelle des Quotienten, und multipliciret damit den Diviſorem $a+b$——d, ſo komt $aa+ab$——ad (§. 47.) ſetzet dieſes unter den Dividendus, und ziehet es von demſelben ab, ſo bleibt ——ab——ad——$bb+dd$, wobey zu merken, weil $+ab$ im Dividendo nicht zu finden, es nur mit verkehrtem Zeichen in den Reſt komme. (§. 46.) Sprecht ferner: a in —ab hab ich —b (18. 42), multipliciret —b wieder mit dem Diviſor, und ziehet vom Dividendus ab, ſo bleibet ——ad——$bd+dd$. Wiederum a in ——ad, gibt ——d, ——d mit dem Diviſor multipliciret und ſubtrahiret, ſo gehets auf. Gieng es nicht auf, ſo wäre es ein Zeichen, daß die Diviſion nicht wirklich geſchehen könnte, ſondern nur in Zeichen zu verrichten ſeye. (§. 21.).

Die 2. Anmerkung.

§. 50. Es werden ſelten Exempel vorkommen, da man einen aus verſchiedenen Gliedern beſtehenden Dividendum mit einem Diviſore, der auch aus mehrern Gliedern beſtehet, wirklich dividiren kan; wann nicht der Dividendus vorher durch eine Multiplication entſtanden: dahero ſich ein Anfänger durch die geringe Schwierigkeit, die das Dividiren zu machen ſcheinet, nicht abſchrecken laſſen ſoll. Komt ein Exempel vor, da man vermuthet, es laſſe ſich wirklich dividiren, ſo komts auf Verſuchen an, ob es ſich thun laſſe; will es nicht gehen, ſo richtet man ſich in der Zeichnung nach §. 21.

Die 3. Anmerkung.

§. 51. Wenn der Diviſor nur aus einem Glied beſtehet, das entweder nur einen oder mehrere Buchſtaben enthält, welche in allen Gliedern des Dividendi angetroffen werden, ſo ſtreicht man den Diviſorem nur aus den Gliedern des Dividendi weg, (§. 18.) als:

a) $\frac{ab + 3ca - af}{b + 3c - f}$ | ab) $\frac{4abb - 5cab + dab}{4b - 5c + d}$

Würde aber der Diviſor in einem oder etlichen Gliedern des Dividendi nicht angetroffen, ſo müßte man da ſich mit dem zeichnen behelfen, (§. 21.) als:

bc) $\frac{aabc - 3fabc + dgxx}{aa - 3fa + \frac{dgxx}{bc}}$

Die 4. Anmerkung.

§. 52. Damit man nicht glauben mögte, als ob die Buchſtabenrechenkunſt unvollſtändig ſeye, wenn nicht auch gezeiget würde, wie man die Brüche in Buchſtaben behandlen und berechnen ſolle; ſo iſt nur zu bemerken, daß darinn kein Unterſchied ſeye von der gemeinen Rechenkunſt, und wie man dort verfährt, ſo verfährt man auch hier in allen Stücken, nur daß man die Art zu addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren, nach der Buchſtabenrechenkunſt in Acht nehme.

Die 6. Erklärung.

§. 53. Wenn eine Gröſſe mit ihr ſelber multipliciret wird, ſo heiſſet das Product die andere Potenz

Potenz oder Dignität derſelben Gröſſe. Wird die andere Potenz wieder mit der erſten multipliciret, ſo komt die dritte Potenz heraus. Desgleichen, wenn die dritte Potenz nochmal mit der erſten multipliciret wird, ſo entſtehet die vierte und auf gleiche Weiſe die fünfte, ſechſte, ꝛc. Die Gröſſe ſelbſten, welche auf dieſe Art multipliciret worden, wird die erſte Potenz oder die Wurzel genennet.

Die 1. Anmerkung.

§. 54. Wenn die Wurzel *a* genennet wird, ſo iſt die zweyte Potenz *aa*, die dritte *aaa*, die vierte *aaaa*, die fünfte *aaaaa*, u. ſ. w. (§. 17.). Da aber dieſe Art zu ſchreiben ſo wol zum ausſprechen als ſchreiben unbequem, ſo hat man eine geſchicktere Art, die Potenzen zu ſchreiben, angenommen, wie §. 56. zu ſehen.

Die 2. Anmerkung.

§. 55. Vor dieſem pflegte man die andere Potenz quadratum oder cenſum zu nennen; die dritte cubum; die vierte quadrato quadratum oder cenſi cenſum; oder auch biquadratum; ; die fünfte ſurdeſolidum, oder cenſicubum; die ſechſte ſurdeſolidum ſecundum; die ſiebende cenſi cenſi cenſum, u. ſ. w. Da aber die neuere von Carteſio auf Keplers Anrathen angenommene Benennung viel ſchicklicher iſt; ſo iſt die alte ganz abgekommen, auſſer, daß man noch ſagt: quadratum, cubus, und biquadratum.

Die 7. willkührliche Satz.

§. 56. Wenn bey einem Buchſtaben oder Zahl ſoll angezeiget werden, zu der wievielten Potenz

oder Dignität er erhoben worden, so schreibt man die Zahl oben zur Rechten daran, als: a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, ꝛc. oder wenn man noch nicht bestimmen will, welche Potenz es eigentlich sey, einen von den Buchstaben m, n, r, s, t, als x^m, b^n, d^r, die Wurzel aber selbst wird entweder nur blos hingesetzt, als a, oder bekommt einen Einser, als a^1, und diese oben angehängte Buchstaben oder Zahlen heissen Exponenten der Dignität oder Potenz.

Der 1. Zusatz.

§. 57. Man wird leicht begreiffen, daß ein grosser Unterschied unter $2a$ und a^2, unter $3a$ und a^3 ꝛc. seye: denn gesetzt, a bedeute 5, so ist $2a$ so viel als 2mal 5, das ist 10, a^2 aber ist so viel als 5mal 5, das ist 25, u. s. w.

Der 2. Zusatz.

§. 58. Wenn Buchstaben mit einander sollen multipliciret werden, so werden sie nur aneinander gesetzt (§. 17.), wenn also aa mit aaa multipliciret wird, so gibt es $aaaaa$; da aber aa so viel als a^2, und a^3 so viel als aaa, so erhellet, daß a^2 mit a^3 multipliciret a^5 geben müsse. und überhaupt die Exponenten nur addirt werden dürfen, wenn man Potenzen von einerley Wurzel multipliciren soll:

a^4	a^5	x^m	b^n	c^r	d^n	x^{n-1}
a^3	a	x^n	b^n	c	d^2	x
a^7	a^6	x^{m+n}	b^{2n}	c^{r+1}	d^{n+2}	x^n

Der

Der 3. Zusatz.

§. 59. Eben so ist klar, weil die Buchstaben bey dem dividiren wegenommen werden (§. 18.), daß der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividendi nur abgezogen werden dörfe, wenn man Potenzen von einerley Wurzel dividiren will, als:

$x5$	$x5$	a^m	b^{m+n}	c^n	c^{m-1}
$x2$	x	a^n	b^n	c	c
$x3$	$x4$	a^{m-n}	b^m	c^{n-1}	c^{m-2}

desgleichen $a+ma+m^2a$ in $a^2+m^2a^2+m^4a^2$ dividiret, gibt $a——ma+m^2a$ (§. 48.).

Der 4. Zusatz.

§. 60. Weil a^2 in a^2 dividirt eines gibt, a^2 aber in a^2 dividirt a^0 geschrieben werden muß (§. 59.), so ist $a^0=1$, das ist, wenn der Exponent o ist, so bedeutet es eins.

Der 5. Zusatz.

§. 61. Wenn der Exponent negativ ist, ist es eben so viel, als wäre er von o abgezogen: wo aber der Exponent o ist, ist der Buchstabe eins, (60.) und das Subtrahiren des Exponenten zeigt dividiren an (§. 59.), also ist $a^{-2}=a^{\frac{3}{2}}$, $a^{-3}=a^{\frac{1}{3}}$, $a^{-m}=a^{\frac{1}{m}}$ ꝛc. denn a^{-2} ist eben so viel als a^0 dividiret mit a^2 (§. 59.); a^0 aber ist $=1$, dahero $a^{-2}=\frac{1}{a2}$, als 4^{-3} ist $\frac{1}{64}$, 3^{-2} ist $\frac{1}{9}$ ꝛc.

Digitized by Google

Der 6. Zusatz.

§. 62. Weil eine jede Grösse in sich selbst multipliciret werden kan, und das Product wieder mit derselben Grösse, so kan auch jede Potenz als eine Wurzel angesehen werden (§ 53.), und wenn sie mit sich selbst multipliciret wird, wird ihr Exponent zu sich selbst addirt (§. 58.) das ist, doppelt genommen, wird damit die Potenz die zur Wurzel angenommen worden, nochmal multipliciret, so wird auch ihr Exponent addirt, das ist, dreymal genommen, u. s. w. dahero, wenn eine Potenz zu einer höhern Potenz erhoben werden soll, darf nur ihr Exponent mit der Zahl multipliciret werden, zu welcher Potenz sie soll erhoben werden, als:

Wurzel	a^3	a^5	a^m	a^r
Zur Potenz	2	3	n	4
	a^{6}	a^{15}	a^{mn}	a^{4r}

Der 1. Zusatz.

§. 63. Weil durch die Multiplication des Exponenten eine Potenz zu einer höhern erhoben wird, so muß durch die Division des Exponenten die Wurzel ausgezogen werden, weil die Division der Rukweg der Multiplication ist, als:

Potenz	a^6	x^{12}	x^m	x^m	x^3	a
Wurzel	2	3	4	n	2	3
	a^3	x^4	$x^{m:4}$	$x^{m:n}$	$x^{3:2}$	$a^{1:3}$

Die

Die 7. Erklärung.

§. 64. Die Gröſſen, aus welchen die Wurzel nicht genau gezogen werden kan, werden irrational genennet, als die Wurzel aus 7.

Der 8. willkührliche Satz.

§. 65. Wenn man anzeigen ſoll, daß aus einer Gröſſe die Wurzel gezogen werden ſoll, braucht man dieſes Zeichen $\surd$) und ſo es die dritte, vierte, ꝛc. Wurzel iſt, ſchreibet man die Zahl oben drein; bey der zweyten Wurzel aber wird meiſtens keine Zahl in das Wurzelzeichen geſetzt, als: $\surd 5$ $\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[5]{a^3}$ $\sqrt[m]{x^n}$ beſtehet die Gröſſe aus vielen Gliedern, ſo ſchließt man ſie entweder mit Klammern ein oder ziehet einen Strich darüber, als: $\sqrt[m]{aa+bb}$ oder $\sqrt[n]{(aa+bb)}$, $\sqrt{xx-2cx}$, $\surd(dx^2+abx)$.

Der 1. Zuſatz.

§. 66. Weil $\sqrt[3]{a^2} = a^{2:3}$ und $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§ 63. 65.) ſo kan man brauchen, welches man will, und von welchem man Vortheil hat, welches ſich unten zeigen wird.

Und weil es bey den Irrationalgröſſen auf dem Exponenten ankomt, der ein Bruch iſt, ſo können zwey Irrationalgröſſen zu einerley Benennung gebracht werden, wenn ihre Exponenten, wie die Brüche in der gemeinen Rechenkunſt, zu einerley Benennung gebracht

werden, als: $\sqrt[3]{a^4}$ und $\sqrt[4]{a^3}$, gelten $a^{4:3}$ und $a^{3:4}$, sind auch $a^{16:12}$ und $a^{9:12}$ oder $\sqrt[12]{a^{16}}$ und $\sqrt[12]{a^9}$, desgleichen $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{x^5}$ gibt $\sqrt[rm]{x^{nr}}$ und $\sqrt[rm]{x^{sm}}$.

Der 2. Zusatz.

§. 67. Einen Bruch $\frac{m}{n}$ auf das Quadrat erheben heißt, ihn mit sich multipliciren, oder das Quadrat ist $\frac{m.m}{n\,n} = \frac{m\,m}{n.n}$, nämlich ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Quadrate des vorigen Zählers und Nenners sind. Umgekehrt aus dem Bruche $\frac{m^2}{n^2}$ die Quadratwurzel ziehen, heißt einen Bruch machen, dessen Zähler und Nenner die Quadratwurzeln jenes Zählers und Nenners sind, oder es ist $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}} = \frac{m}{n}$, denn wenn man $\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}}$ quadirt, so kömt nach dieses Zusatzes ersten Theile $\frac{m^2}{n^2}$ heraus.

So ist $(\frac{2}{3})^2 = \frac{2.2}{3.3} = \frac{4}{9}$; und $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$;

Die-

Dieſes dient manchmal, eine Irrationalzahl bequemer auszudrucken. Z. E. $\sqrt{\frac{7}{10000}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{7}}{100}$

Eben ſo iſt $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{m^3}{n^3}$, und $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}$!

z. E. $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{64}{125}$ und $\sqrt[3]{\frac{8}{343}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{343}}$

$= \frac{2}{7}$. Eben ſo $\sqrt[3]{\frac{7}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{10}$

Ueberhaupt erhellet, daß einen Bruch auf eine Potenz erheben heißt: ſeinen Zähler und Nenner auf dieſe Potenz erheben; daß $\left(\frac{b}{a}\right)^e = \frac{b^e}{a^e}$ und eben ſo aus einem Bruche eine gewiſſe Wurzel ziehen heißt; ſolche aus Zähler und Nenner ziehen, oder daß $\sqrt[e]{\frac{b}{a}}$

$= \frac{\sqrt[e]{b}}{\sqrt[e]{a}}$

Anmerkung.

§. 68. Die Irrationalgröſſen zu berechnen, ſolten noch mehrere Aufgaben angebracht werden; weilen ſie aber von Anfang etwas ſchwer ſcheinen, ſo iſt es beſſer, ſie werden

den verſparet bis dahin, wo ſie nöthig ſind, und gleich angewendet werden. Siehe unten §. 161 - 168. Wir verlaſſen daher die Buchſtabenrechenkunſt, und gehen zur Algebra.

Die 5. Aufgabe.

§. 69. Eine Aufgabe algebraiſch aufzulöſen.

Auflöſung.

Bey einer jeden Aufgabe, die algebraiſch aufgelöſet werden ſoll, komt es auf drey Stücke an: 1) Die Benennung (§. 12. 13. 14. 15.) 2) Auf eine Aequation, (§. 7. 3.). 3) Auf die Reduction, da man der unbekannten Gröſſe Wehrt findet; indem man ſie auf eine Seite des Aequalzeichens bringt, und auf die andere lauter bekannte. Daher verfährt man alſo:

1) Die unbekannten Gröſſen benennet man mit x, y, z; die bekannte aber mit a, b c, ꝛc. (§. 12.) oder ſind es Zahlen, ſo können ſie als Zahlen bleiben.

2) Man ſucht aus den Umſtänden der Aufgabe eine Aequation, indem man eine Gröſſe auf zweyerley Art ausdrukt, (§. 3.).

3) Wenn die Gleichung gemacht, und auf beyden Seiten bekannte und unbekannte Gröſſen unter einander ſtehen, ſo muß die unbekannte auf einer Seite weggeſchaft werden, damit ſie nur auf einer einigen Seite angetroffen werde; doch ſo, daß es immer eine Gleichheit bleibe. Iſt dieſes geſchehen, ſo muß die unbekannte von den bekannten, die noch bey ihr ſtehen, befreyet werden bis ſie ganz allein ſtehet. Es geſchiehet aber das Wegſchaffen, wenn man das Addirte ſubtrahirt, das Subtrahirte addirt, das Multiplicirte dividirt, und

das

das Dividirte multiplicirt, desgleichen aus den Dignitten Wurzeln ziehet, und die Wurzeln zu Dignitäten erhebet. Doch allezeit so, daß, um die Aequation zu erhalten, was auf der einen Seite geschichet auch auf der andern geschehen muß. Wenn denn endlich die unbekannte allein auf einer, und die bekannten auf der andern Seite stehen, so weiß man, wem die unbekannte gleich ist. Welches zu finden war.

Die 1. Anmerkung.

§. 70. Bey der Benennung kan man sich eine Aufgabe leicht oder schwer aufzulösen machen, davon sich zwar wohl Regeln geben liessen; allein sie werden sich leichter durch Exempel bekannt machen lassen. Darum soll hier ausser dem, was §. 12. gesagt worden, nichts weiter gesagt werden, als daß man sich bemühen soll, so wenig unbekannte Grössen in die Aequation zu bringen, als nur möglich. Die Benennung, und die aus derselben und den Umständen des Exempels zu machende Aequation läßt sich am leichtesten dadurch begreiffen, wenn man die Aufgabe aus der gemeinen in die algebraische Sprache übersetzet, welches durch folgendes Exempel deutlich werden kan. Ein Kaufmann hat eine Summe Geldes, gewinnt damit jährlich einen Drittel davon, braucht aber jährlich 1000 fl. in seine Haushaltung; nach dreyen Jahren ist er nochmal so reich als vorher, wie viel hat er anfänglich gehabt?

In Teutscher Sprach.	In Algebraischer Sprach.
Ein Kaufmann hat eine gewisse Summe Geldes, die man wissen mögte,	x
von welcher er jährlich 1000 fl. ausgiebt,	$x-1000$

zu

zu dem übrigen gewinnt er noch den dritten Theil.

$$x-1000+\frac{x-1000}{3} \text{ oder } \frac{4x-4000}{3}$$

Im zweyten Jahr gibt er wieder aus 1000 fl.

$$\frac{4x-4000}{3}-1000 \text{ oder } \frac{4x-7000}{3}$$

Den Rest vermehrt er um den dritten Theil.

$$\frac{4x-7000}{3}+\frac{4x-7000}{9} \text{ oder } \frac{16x-28000}{9}$$

Im dritten Jahr gibt er wieder 1000 fl. aus,

$$\frac{16x-28000}{9}-1000 \text{ oder } \frac{16x-37000}{9}$$

und den Rest vermehrt er um den dritten Theil,

$$\frac{16x-37000}{9}+\frac{16x-37000}{27} \text{ oder } \frac{64x-148000}{27}$$

und darauf wird er nochmal so reich als vorher.

$$\frac{64x-148000}{27}=2x$$

Man wird keine Schwierigkeit machen zu begreiffen, wie $\frac{x-1000}{3}+\frac{x-1000}{3}$ zu $\frac{4x-4000}{3}$ worden, da nur

$x-$

x——1000 auch zu Drittel gemacht worden, $\frac{3x-3000}{3}$

folglich $\frac{3x-3000+x-1000}{3} = \frac{4x-4000}{3}$, und so

auch in den folgenden.

Die 2. Anmerkung.

§. 71. Die Reduction läſſet ſich von einem Anfänger nicht leichter begriffen, als wenn er ſich eine Aequation als eine Wage vorſtellet, die inne ſtehet, in deren beyden Schalen gezeichnete Gewichtſteine und Stücker Waare von unbekanntem Gewicht unter einander liegen, da man ſich nämlich die bekannten Gröſſen oder Zahlen als gezeichnetes Gewicht, die unbekannten aber als Stücker Waare, deren Gewicht man nicht weiß, und den Waagbalken durch das Zeichen = vorſtellet. Z. E. Die vorher §. 70. gefundene Aequation $\frac{64x-148000}{27} = \frac{2x}{27}$ hies nach dieſer Vorſtellung alſo: in einer Wagſchale liegen von einer Waare (x) 64 Stücke; doch nur von jedem der 27ſte Theil, weniger $\frac{148000}{27}$ an gezeichneten Gewichtſteinen; in der andern Wagſchale von der Waare 2 ganze Stücke. Nun wolte ich gern wiſſen, wie viel ein ſolches Stück Waare wäge, welches ich erführe, wenn ein ſolches Stück ganz allein in der einen Wagſchale läge, und in der andern lauter Gewichtſteine, dabey aber die Wage noch immer inne ſtünde. Damit ich nun dieſes erfahre, ſo will ich ſo lang aus einer Wagſchale ſo viel Gewichtſteine oder Stücker Waaren nehmen, als aus der andern, oder in eine ſo viel legen, als in die

die andere, oder das, was in jeder Schale liegt, verdoppeln, oder sonst vervielfältigen oder halbiren, oder sonst in gleiche Theile theilen, bis ich in einer Wagschale das Stück Waare alleine habe, und in der andern die Gewichtsteine: denn wenn ich immer in einer Wagschale vornehme, was in der andern, so wird die Wage immer inne stehen bleiben.

$$\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = \frac{2x}{27}$$

Hier will ich machen, daß ich keine Stücker Waare mehr habe, die nur der 27ste Theil sind, sondern ich will ganze haben, darum will ich ein jedes 27mal nehmen, oder das ganze Gewicht in jeder Schale 27mal vervielfältigen, das ist, mit 27 multipliciren: denn diesen Vortheil muß man fast immer brauchen, daß man vor allen Dingen suche die Brüche wegzuschaffen.

$$\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = \frac{2x}{27}$$

Multipl. 27) $64x - 148000 = 54x$

Man wird sich nicht wundern, daß $\frac{5}{2}\frac{4}{7}x$ mit 27 multiplicirt $64x$ gebe: denn $\frac{1}{2}\frac{}{7}$ mit 27 multiplicirt, gibt $\frac{2}{2}\frac{7}{7}$ oder eins, $\frac{2}{2}\frac{}{7}$ mit 27 gibt 2mal $\frac{2}{2}\frac{7}{7}$ oder 2, u. s. w. Ueberhaupt, wenn ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist es eben so viel, als würde nur solcher Nenner weggelassen, und der Zähler bleibe allein stehen.

In einer Schale fehlen nun 148000, die will ich ersetzen, und in die andere auch so viel thun, das ist, 148000 addiren:

$$64x - 148000 = 54x$$

addire $148000 \quad 148000$ (§. 26.).

$$64x = 54x + 148000$$

Aus

Aus beyden Schalen will ich 54 Stücker Waare (x) wegnehmen:

$$64x = 54x + 148000$$

subtrahire $54x = 54x$

$$10x = 148000$$

Da nun in einer Schale 10 Stücker Waare liegen, in der andern an Gewichtsteinen 148000, so will ich nur ein Stück Waare behalten, und von 148000 auch nur den zehenden Theil, das ist, mit 10 dividiren, so wird meine Wage noch inne stehen.

$$10x = 148000$$

$$x = 14800$$

Und jetzt weiß ich, was mein Stück Waare wiegt.

Der 3. Lehrsatz.

§. 72. **Wenn die Aufgabe soll determiniret seyn, müssen so viel Aequationen gemacht werden, als unbekannte Grössen vorhanden.**

Beweiß.

Gesetzt, es wären in einer Aequation zwey unbekannte Grössen, so würden entweder beyde auf eine Seite allein kommen, oder nur eine, und die andere auf die andere Seite. Im ersten Fall würde man wohl wissen, wie viel die beyde mit einander, aber nicht was jede besonders betrüge; im andern Fall aber würde bekannt werden, daß eine unbekannte einer gewissen bekannten und einer unbekannten gleich, wodurch nichts determinirtes herauskäme. Dahero können in einer Aequation nicht zwey unbekannte Grössen seyn, sondern jede unbekannte Grösse fordert eine eigene Aequation, wenn sie determiniret

seyn soll, welches eben so leicht von mehreren unbekannten einzusehen, w. z. E.

Zusatz.

§. 73. Wellen aber gleichwohl bey mehreren Aequationen die unbekannten Grössen nicht determiniret werden, wenn nicht eine Aequation daraus gemacht wird, so muß man suchen, eine Aequation zu bekommen, welches durch Exempel klar werden wird.

Die 6. Aufgabe.

§. 74. Alexander der Grosse sprach zu seinen Generalen: Ich bin zwey Jahr älter als Ephestion; Clytus sagte: Ich bin vier Jahr älter als ihr beyde; Calisthenes setzte hinzu: Mein Vater ist 96 Jahr alt, und so alt als alle drey, wie alt war jeder?

Auflösung.

Wenn wir Ephestions Alter wüßten, würde alles gethan seyn; weil aber dieses unbekannt, so wollen wirs nennen $= x$

Alexander ist 2 Jahr älter $= x + 2$

Beyde zusammen $2x + 2$

Clytus ist 4 Jahr älter als diese, also $2x + 2 + 4$

Aller dreyen Alter addirt:

Ephest. $= x$
Alexand. $= x + 2$
Clyt. $= 2x + 6$

$4x + 8$

Die

Dieſes beträgt das Alter von Caliſthenis Vater, der 96 Jahr alt, dahero

$$4x+8=96$$

8 Subtr.) $\quad 8 \quad 8$

$$4x = 88$$

4 Divid.) $\quad 4 \quad 4$

$$x = 22.$$

Prob:

Epheſt. $= 22$
Alexand. $= 24$
Clyt. $= 50$

90 das Alter von Caliſthenis Vater.

Die 7. Aufgabe.

§. 75. Corydon und Mopſus ſtreiten über die Anzahl ihrer Schafe; Coridon ſagt: Gibſt du mir eines von deinen, ſo habe ich nochmal ſo viel als du. Mopſus erwiedert: Gibſt du mir eines von deinen, ſo habe ich ſo viel als du. Wie viel hat jeder gehabt?

Auflöſung.

Corydon hat gehabt $= x$
Mopſus $= y$

bekomt Corydon eins, ſo hat er $x+1$ und Mopſus eines weniger als vorher, das iſt, $y-1$; weil aber in dieſem Fall Corydon nochmal ſo viel hat als Mopſus, ſo müſſen des Mopſus ſeine $(y-1)$ doppelt genommen werden $(2y-2)$, ſo ſind ſie der Anzahl des Corydons gleich.

$$x + 1 = 2y - 2$$

bekomt Mopsus eins, so hat er $y + 1$ und Corydon hingegen $x - 1$, und jetzt sollen beyde gleichviel haben, dahero

$$y + 1 = x - 1$$

Beyde Aequationen werden neben einander gesetzt,

$$x + 1 = 2y - 2 \qquad y + 1 = x - 1$$

weil aber beyde Aequationen zu einer gemacht werden müssen (§.73.), kan solches nicht besser geschehen, als wenn man in beyden Aequationen eine unbekannte Zahl auf eine Seite bringt. Wir wollen x auf eine Seite bringen:

$$\begin{array}{lcl} & x + 1 = 2y - 2 & \qquad y + 1 = x - 1 \\ & \quad\;\; 1 \qquad\quad 1 & \qquad\quad 1 \qquad\quad 1 \\ \text{Subtr.} & \text{———————} & \text{Add.)} \text{———————} \\ & x = 2y - 3 & \qquad y + 2 = x \end{array}$$

Wenn zwey Grössen, nämlich $2y - 3$ und $y + 2$ einer dritten x gleich sind, sind sie einander selber gleich, darum ist

$$\begin{array}{lcl} & 2y - 3 = y + 2 \\ \text{Add.)} & \quad\;\; 3 \qquad\quad 3 \\ \hline & 2y = y + 5 \\ \text{Subtr.)} & y \qquad y \\ \hline & y = 5. \end{array}$$

Nun weiß man, wie viel y beträgt, setzt man dessen Wehrt 5 in die obige Aequation $y + 2 = x$, so komt $5 + 2 = x$, das ist, $x = 7$.

Es hätte diese Aequation auch noch kürzer aufgelöst

löst werden können, wenn beyde Aequationen von einander subtrahiret worden wären.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & x+1 & = & 2y-2 \\
\text{Subtr.)} & x-1 & = & y+1 \\
\hline
 & +2 & = & y-3 \\
\text{Addire.)} & 3 & & 3 \\
\hline
 & 5 & = & y
\end{array}
$$

Die 8. Aufgabe.

§. 76. Zwey Zahlen zu finden, dit zusammen 253 ausmachen, eine aber um 79 grösser ist als die andere.

Auflösung.

Die eine seye $= x$
Die andere um 79 grösser $= x + 79$

Zusammen $2x + 79 = 253$

$$
\begin{array}{lrcr}
 & 79 & & 79 \\
\text{Subtr.)} & & & \\
\hline
 & 2x & = & 174 \\
 & 2 & & 2 \\
\text{Divid.)} & & & \\
\hline
 & x & = & 87
\end{array}
$$

Probe: eine ist 87
die andere 166

253

Diese Aufgabe läßt sich allgemein also auflösen:

Aus

Aus der Summe f und der Differenz d; von ein Paar Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die kleinere heisse X: so ist die grössere $X + d$; beyde zusammen $X + X + d = 2x + d$. Also ist

$$2X + d = f$$

Subtr.) $$d = d$$

$$2X = f - d$$

mit $2 = 2$ dividirt

$$X = \frac{f - d}{2} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d$$

folglich die grössere $= \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d + d = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}d$. Die kleinere Zahl ist also, die halbe Summe weniger der halben Differenz; die grössere ist, die halbe Summe und die halbe Differenz zusammen addirt, welche Regel in vielen Fällen sehr nützlich zu gebrauchen ist. So ist im Exempel die kleinere $126\frac{1}{2} - 39\frac{1}{2}$, die grössere $126\frac{1}{2} + 39\frac{1}{2}$. Will man daher Summe und Differenz nach Gefallen annehmen, und daraus die Zahlen finden, so müssen beyde, Summe und Differenz, zugleich gerade oder zugleich ungerade seyn, wenn die gesuchten Zahlen ganze seyn sollen.

Die 9. Aufgabe.

§. 77. Eine Zahl zu finden, daß, wenn man 9 dazu addirt, und die Summe mit 5 dividirt, 13 heraus komme.

Die

Die Auflösung.

Die Zahl seye $= x$
9 dazu addirt $= x + 9$
mit 5 dividirt $= \frac{x+9}{5}$

folglich $\frac{x+9}{5} = 13$

Multipl.) $\frac{5 \qquad\qquad 5}{x+9 = 65}$

Subtr.) $\frac{9 \qquad 9}{x \qquad = 56}$

Anmerkung.

§. 78. Diese Aufgabe kan auch so vorgetragen werden. Es kommen 5 Collectanten zu einem, und bitten ihn, um eine erkleckliche Beysteuer. Er spricht: Ich habe nicht Geld bey mir; doch, wenn ich noch 9 Kreutzer hätte, könnte ich einem jeden 13 Kreutzer geben. Wie viel hat er gehabt?

Die 10. Aufgabe.

§. 79. Was ist das für eine Zahl, daß, nachdem man den fünften und dritten Theil von ihr weggegeben, noch 14 übrig behalte?

Auflösung.

Die Zahl seye $= x$

Digitized by Google

Der fünfte Theil $= \frac{x}{5}$ oder $\frac{3x}{15}$

Der dritte Theil $= \frac{x}{3}$ oder $\frac{5x}{15}$

Zusammen $= \frac{8x}{15}$

Von x abgezogen bleibt $\frac{7x}{15}$

Dahero $\frac{7x}{15} = 14$

Multipl. $15 \quad 15$

$7x = 210$

Divid. $7 \quad 7$

$x = 30$

Die II. Aufgabe.

§. 80. Einer wurde gefragt, wie viel er Geld habe? Er gibt zur Antwort: Ich habe mein Geld in vier Beuteln; in dem ersten ist der siebende Theil; in dem zweyten der fünfte Theil; in dem dritten der sechste Theil; und in dem vierten das übrige; in den ersten dreyen habe ich zusammen 321 fl. Wie viel hat er überhaupt, und in jedem besonders?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Er habe gehabt x

in dem ersten Beutel $\frac{x}{7} = \frac{30x}{210}$

in dem zweyten $\frac{x}{5} = \frac{42x}{210}$

in dem dritten $\frac{x}{6} = \frac{35x}{210}$

Zusammen $321 = \frac{107x}{210}$

Mult.) $210 \quad 210$

$67410 = 107x$

Divid.) $107 \quad 107$

$630 = x$

Probe: Im ersten $\frac{x}{7} = 90$

zweyten $\frac{x}{5} = 126$

dritten $\frac{x}{6} = 105$

321

630

folglich im vierten $= 309$

Die 12. Aufgabe.

§. 81. Eine Zahl zu finden, deren dritter Theil um 17 mehr ist als der vierte.

Auflösung.

Die Zahl seye $= x$, so ist

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 17$$

oder

$$\frac{4x}{12} = \frac{3x}{12} + 17$$

Subtr.)

$$\frac{3x}{12} \quad \frac{3x}{12}$$

$$\frac{x}{12} = 17$$

Multipl.

$$12 \quad 12$$

$$x = 204$$

Die 13. Aufgabe.

§. 82. Drey werden zu Erben eingesetzt, daß der andere nochmal so viel bekommen soll, als der erste, und der dritte dreimal so viel als der andere. Das ganze Vermögen ist 18000 fl. Wie viel bekomt jeder?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Der erste bekomt x
Der andere $2x$
Der dritte $6x$

Zusammen $9x = 18000$
$9 \quad 9$

$x = 2000$

Also der erste 2000
der zweyte 4000
der dritte 12000

18000

Die 14. Aufgabe.

§. 83. Ein Lehrmeister hat so viel Schüler, daß, wenn ihme einer zur Erkauffung eines Gartens 5 fl. gibt, so hat er 42 fl. zu wenig; gibt ihm aber einer 6, so hat er 58 fl. zu viel. Wie viel hatte er Schüler, und wie hoch hat er den Garten gekauft?

Auflösung.

Die Anzahl seiner Schüler sey $= x$.
gibt jeder 5 fl., so hat er $5x$, folglich kostet der Garten
$5x + 42$ fl.
gibt jeder 6 fl., so hat er $6x$, folglich kostet der Garten
$6x - 58$ fl. dahero

$5x$

$$5x + 42 = 6x - 58$$
$$5x \qquad\quad 5x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$42 = x - 58$$
$$58 \qquad\quad 58$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$100 = x$$

Probe: Es waren 100 Schüler; gab jeder 5 fl. so hat er 500 fl. das war um 42 fl. zu wenig; also kostete der Garten 542 fl. gab einer 6 fl. bekam er 600 fl. welches um 58 fl. zu viel, also kostete der Garten 542 fl.

Die 15. Aufgabe.

§. 84. Vorhergehende Aufgabe allgemeiner aufzulösen, oder eine Regel zu finden für alle dergleichen Exempel.

Auflösung.

Man setze an statt 5, a, an statt 6, b, an statt 42, c, an statt 58, d, so ist

$$ax + c = bx - d$$
$$d \qquad\quad d$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$ax + c + d = bx$$
$$ax \qquad\quad ax$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$c + d = bx - ax$$
$$= (b - a)x \text{ (§. 20.)}$$
$$b - a \qquad b - a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\frac{c+d}{b-a} = x$$

Die

Die letzte Gleichung $\frac{c+d}{b-a} = x$ gibt eine allgemeine Regel für alle Exempel: Wenn an ſtatt der Buchſtaben die Wörter; an ſtatt der Zeichen die Rechnungsarten geſetzt werden, folgender maſſen:

1) $c+d$, man addiret, was im erſten Fall zu wenig; im andern zu viel gegeben worden.

2) $b-a$, man ſubtrahire die wenigere Zahl der gegebenen Gulden von der mehreren.

3) $\frac{c+d}{b-a}$, man dividire, was Nr. 1. gefunden worden durch das, was Nr. 2. gefunden worden.

4) $\frac{c+d}{b-a} = x$, ſo hat man die Anzahl der Schüler.

Anmerkung.

§. 85. Dieſe Regel gehet auch auf andere ähnliche Fälle, als: Eine Mutter hat Aepfel, gibt ſie einem jeden ihrer Kinder 6, ſo hat ſie 5 übrig; gibt ſie aber 7, ſo hat ſie 3 zu wenig. Hier ſind 5 und 3, c und d gibt 8, 6 von 7, a von b, gibt 1; 1 aber dividirt nicht, dahero ſind 8 Kinder.

Die 16. Aufgabe.

§. 86. Eine Frau bringt Garn zum Weber, und verlangt davon 100 Ehlen. Der Weber ſagte, es ſeyen 5 Pfund zu wenig; darauf ſpricht ſie, ſo wolle ſie nur 80 Ehlen anſpannen laſſen; der Weber ſpricht, ſo werde ſie 3 Pfund übrig haben. Wie viel Pfund Garn waren es, und wie viel Ehlen ſollte das Pfund geben?

Auf-

Auflösung.

Die Pfundte des Garns seyen gewesen $= x$ so brauchte man zu 100 Ehlen $x + 5$

folglich zu einer Ehle $\frac{x+5}{100}$

zu 80 Ehlen $x - 3$, folglich zu einer $\frac{x-3}{80}$

dahero $\frac{x+5}{100} = \frac{x-3}{80}$

100 mult.) $x + 5 = \frac{100x - 300}{80}$

80 mult.) $80x + 400 = 100x - 300$

add.) $300 \qquad 300$

$80x = 700 = 100x$

subtr.) $80x \qquad 80x$

$700 = 20x$

divid.) $20 \quad 20$

$35 = x$

folglich geben $35 + 5 = 40$ Pfundt 100 Ehlen, also 1 Pfundt $2\frac{1}{2}$ Ehlen; desgleichen $35 - 3 = 32$ Pfundt geben 80, also 1 Pfundt $2\frac{1}{2}$ Ehlen.

Die

Die 17. Aufgabe.

§. 87. Eine Säule hatte einen Fuß zu $5\frac{1}{2}$ Schuh von Stein; darauf war Holz gesetzt, so die Hälfte der Säule ausmachte; über dem Holz Kupfer $\frac{1}{5}$, und zu oberst Gold ein $\frac{1}{7}$ der Säule. Wie hoch war die Säule?

Auflösung.

Die Säule seye hoch gewesen $= x$

so war Stein $= 5\frac{1}{2}$

Holtz $= \frac{x}{2} = \frac{35x}{70}$

Kupfer $= \frac{x}{5} = \frac{14x}{70}$

Gold $= \frac{x}{7} = \frac{10x}{70}$

zusammen die ganze Säule $x = \frac{59x}{70} + 5\frac{1}{2}$

70 mult. $70x = 59x + 385$

subtr.) $59x \quad 59x$

$11x = 385$

$11 \quad 11$

$x = 35$

Probe

Probe: Stein $= 5\frac{1}{2}$

Holz $\frac{x}{2} = 17\frac{1}{2}$

Kupfer $\frac{x}{5} = 7$

Gold $\frac{x}{7} = 5$

35

Die 18. Aufgabe.

§. 88. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte, ein Drittel und ein Viertel, um eines mehr macht, als die Zahl selber.

Auflösung.

Die Zahl seye $= x$, so ist

$\frac{x}{2} = \frac{12x}{24}$

$\frac{x}{3} = \frac{8x}{24}$

$\frac{x}{4} = \frac{6x}{24}$

$$\text{zusammen} \quad \frac{26x}{24} = x + 1$$

$$\text{mult.)} \quad 24 \qquad 24$$

$$26x = 24x + 24$$

$$\text{subtr.)} \quad 24x \qquad 24x$$

$$2x = 24$$

$$\text{divid.} \quad 2 \qquad 2$$

$$x = 12$$

Die 19. Aufgabe.

§. 89. Ein Vatter hinterläßt seinen 11 Kindern 3600 fl. mit dem Beding, daß ein Sohn 360 fl., eine Tochter aber 300 fl. bekommen solle; bey der Theilung gieng das Vermögen gerad auf. Wie viel Söhne und wie viel Töchter warens?

Auflösung.

Es seyen Söhne gewesen $= x$
so waren Töchter $11 - x$
jeder Sohn bekam 360 fl. also alle $360x$
jede Tochter 300 fl. also alle $3300 - 300x$
alle zusammen bekamen $3600 = 3300 + 60x$

$$3300 \qquad 3300$$

$$300 = 60x$$

$$60 \qquad 60$$

$$5 = x$$

folglich waren der Töchter 6, davon die Probe leicht zu machen.

Die 1. Anmerkung.

§. 90. Hätte man die ganze Erbschaft a genennet, die Anzahl der Kinder n, das, was ein Sohn bekommen soll, b, und was eine Tochter haben soll c; so würde heraus gekommen seyn $x = \frac{a - cn}{b - c}$, woraus eine Regel für alle ähnliche Fälle zu machen wäre, wie §. 84. gezeiget worden.

Die 2. Anmerkung.

§. 91. Zur Uebung wollen wir noch ein Exempel, das eben so gerechnet wird, anführen. In einer Stadt liegen 300 Mann, theils Reuter, theils zu Fus, diese kosten monatlich 1800 fl., daß einer zu Fus 5 fl., ein Reuter aber 8 fl. bekomme. Wie viel waren Reuter, und wie viel Fusvolk?

Die 20. Aufgabe.

§. 92. Ein Schweinhändler führet in eine Stadt 28 Schweine, gibt eines für den Zoll, und bekomt 9 fl. heraus. Ein andermal bringt er 132 Schweine, und muß ein Schwein nebst 4 fl. Zoll geben. Was hat ein Schwein gegolten?

Auflösung.

Ein Schwein habe gegolten $= x$
also war Zoll für alle 28 Schweine $= x - 9$

folglich wurde für eines gegeben $= \frac{x - 9}{28}$,

des-

desgleichen wurden für 132 gegeben $= x + 4$

folglich für eines $= \frac{x+4}{132}$

dahero $\frac{x+4}{132} = \frac{x-9}{28}$

132 mult.) $x + 4 = \frac{132x - 1188}{28}$

28 mult.) $28x + 112 = 132x - 1188$

subtr.) $28x \quad 28x$

$112 = 104x - 1188$

add.) $1188 \quad 1188$

$1300 = 104x$

divid.) $104 \quad 104$

$12\frac{1}{2} = x$

Probe: 28 Schweine kosteten am Zoll $12\frac{1}{2}$ weniger 9 fl. das ist, $3\frac{1}{2}$ fl. oder 210 kr., folglich eine $7\frac{1}{2}$ kr. 132 kosteten $12\frac{1}{2} + 4$, das ist, $16\frac{1}{2}$ fl. oder 990 kr., folglich eine $7\frac{1}{2}$ kr., wie bey denen ersten.

Die 21. Aufgabe.

§. 93. Die Gymnasiasten in Megara haben einem Bildhauer für die 9 Musen zu verfertigen versprochen 36 fl. nebst einem goldenen Becher, den sie ihm sogleich zum voraus gegeben. Nachdem er zwey fertig hatte, gieng er weg, und behielte dafür den Becher, doch gab er noch 6 fl. heraus. Wie hoch hat er den Becher geschätzt?

Auflösung.

Der Becher seye werth gewesen $= x$
so bekam der Bildhauer für 9 Musen $x + 36$,

folglich für eine $\frac{x}{9} + 4$

für zwey bekam er $x - 6$
folglich für eine $\frac{x}{2} - 3$

dahero ist $\frac{x}{9} + 4 = \frac{x}{2} - 3$

oder $\frac{2x}{18} + 4 = \frac{9x}{18} - 3$

$-\frac{2x}{18} + 3 - \frac{2x}{18} + 3$

$7 = \frac{7x}{18}$

7 div.) $1 = \frac{x}{18}$

18 mult.) $18 = x$

Die Probe kan jeder leicht machen.

Die 22. Aufgabe.

§. 94. Cajus spricht zu Titio: Gib mir $\frac{1}{3}$ von deinem Geld, und noch 3 fl., so hab ich dreymal so viel,

viel, als dir geblieben. Titius spricht: Gib mir von deinem die Hälfte, und noch 2 fl., so habich neunmal so viel als du. Wie viel hatte jeder?

Auflösung.

Cajus hatte x Titius y

bekomt Cajus von Titio $\frac{1}{3}$ und 3 fl., so hat er

$x + \frac{y}{3} + 3$, Titius hingegen $\frac{2y}{3} - 3$

wird nun $\frac{2y}{3} - 3$ dreymal genommen, $= 2y - 9$

so ist es so viel als des Caji, das ist

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 2y - 9$$

bekomt Titius von Cajo die Hälfte seines Geldes und 2 fl.

so hat er $y + \frac{x}{2} + 2$, Cajus aber $\frac{x}{2} - 2$

wird des Caji $\frac{x}{2} - 2$, neunmal genommen, $= \frac{9x}{2.} - 18$, so ist es so viel als des Caji, das ist $y + \frac{x}{2} + 2 = \frac{9x}{2} - 18$

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 2y - 9 \qquad y + \frac{x}{2} + 2 = \frac{9x}{2} - 18$$

$$\frac{y}{3} \cdot \frac{y}{3}$$

$$\frac{x}{2} \quad \frac{x}{2}$$

$$x + 3 = \frac{5y}{3} - 9$$

$$y + 2 = 4x - \frac{18}{18} \quad \frac{18}{18}$$

$$x = \frac{5y}{3} - 12$$

$$y + 20 = \frac{4x}{4} \quad \frac{4}{4} -$$

$$\frac{y}{4} + 5 = x$$

dahero $\frac{5y}{3} - 12 = \frac{y}{4} + 5$

3) $5y - 36 = \frac{3y}{4} + 15$

4) $20y - 144 = 3y + 60$

$-3y + 144 - 3y + 144$

$\frac{17y}{17} = \frac{204}{17}$

$y = 12$

Setzt man in obige Aequation $\frac{y}{4} + 5 = x$ den Werth von y, nemlich 12, so ist $\frac{12}{4} + 5 = x$ oder $8 = x$

Die

Die 23. Aufgabe.

§. 95. Eine gewisse Stadt, die drey Gassen hat, braucht 900 fl., daran soll die andere Gasse nochmal so viel zahlen als die erste, weniger 17 fl., die dritte $\frac{2}{3}$ der ersten und noch 11 fl. Wie viel hat jede zahlen müssen?

Auflösung.

Die erste hat zahlt x
die andere $2x - 17$
die dritte $\frac{2x}{3} + 11$

$$\frac{11x}{3} - 6 = 900$$

$$3) \quad 11x - 18 = 2700$$

$$11x = 2718 \quad \begin{matrix} +18 \\ +18 \end{matrix}$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{2718}{11}$$

$$x = 247\frac{1}{11}$$

Probe: Die erste mußte geben $247\frac{1}{11}$
die zweyte $477\frac{2}{11}$
die dritte $175\frac{8}{11}$
900

Die 24. Aufgabe.

§. 96. Etliche Knaben und Mägdlein machten unter sich einen zum König, dem sie die Augen zugebunden, bis sich die übrigen verstek-

Digitized by Google

ten, die er ſuchen muſte, mitlerweile aber bemüheten ſie ſich, ihme ſeinen Thron einzunehmen. Es waren anderthalb ſo viel Knaben als Mägdlein, von den Knaben hatte der König $\frac{2}{3}$, von den Mägdlein $\frac{3}{4}$ gefunden, und ehe er noch die 6 übrige finden konnte, war ſein Thron eingenommen. Wie viel waren Knaben und Mägdlein?

Auflöſung.

Mägdlein waren $= x$

folglich Knaben $= \frac{3x}{2}$

von den Knaben $\frac{3x}{2}$ fande er $\frac{2}{3}$, das iſt x

von den Mägdlein $\frac{3}{4}$, das iſt $\frac{3x}{4}$

noch übrig waren 6

zuſammen $x + \frac{3x}{4} + 6 = x + \frac{3x}{2}$

$x \qquad x$

$\frac{3x}{4} + 6 = \frac{3x}{2}$

4

$3x + 24 = 6x$

$3x \qquad 3x$

$24 = 3x$

$3 \quad 3$

$8 = x$

folglich $1\frac{1}{2}$mal ſo viel Knaben, 12

Die

Die 25. Aufgabe.

§. 97. Es hat jemand zwey Becher samt einem Deckel, der 18 fl. werth. Wird der Deckel auf den ersten Becher gesetzt, so ist er nochmal so viel werth, als der andere. Wird er aber auf den andern gesetzt, so ist er ein Viertel mehr werth, als der erste. Wie viel ist jeder werth?

Auflösung.

Der erste seye werth x der andere y
wird der Deckel auf den ersten gesetzt, so ist er $x + 18$ werth, folglich $x + 18 = 2y$
wird er auf den andern gesetzt, so ist er werth $y + 18$ folglich $y + 18 = \frac{5x}{4}$

$$\begin{array}{rl} & \quad 18 \qquad\quad 18 \\ & y = \frac{5x}{4} - 18 \\ 2) & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ & 2y = \frac{5x}{2} - 36 \\ \hline \text{dahero} & x + 18 = \frac{5x}{2} - 36 \\ & \quad 36 \qquad\qquad 36 \\ \hline & x + 54 = \frac{5x}{2} \\ 2) & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ & 2x + 108 = 5x \\ & 2x \qquad\qquad 2x \end{array}$$

$$108 = 3x$$
$$36 = x$$

wird der Wehrt von x in die Aequation $y = \frac{5x}{4} - 18$ gesetzt, so komt $y = 45 - 18 = 27$

Die 26. Aufgabe.

§. 68. Ihrer drey verrichten ein Werk, daß sie zusammen 120 Taglöhn verdienen, der erste bekomt täglich 20 kr., der andere 24 kr., der dritte 30 kr. Es bekomt aber einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Auflösung.

Der erste hat Tage gearbeitet x, bekomt daher $20x$
der andere y, bekomt daher $24y$
der dritte $120 - x - y$, bekomt folglich
$30(120 - x - y)$ das ist $3600 - 30x - 30y$
nun ist $20x = 24y$
$$x = \frac{6y}{5}$$
ferner ist $24y = 30(120 - x - y)$
wird nun hierinn der Werth von x gesetzt, so kommet
$24y = 30(120 - \frac{6y}{5} - y)$ oder
$$24y = 3600 - 36y - 30y$$
$$66y \qquad\qquad 66y$$
$$90y = 3600$$
$$90 \qquad 90$$
$$y = 40$$

wird

wird der Werth von y in die Aequation $x = \frac{6y}{5}$ gesetzt,

so ist $x = 48$, folglich 120——48——40 = 32
also der erste 48 Tage zu 20 kr. gibt 960
andere 40 Tage zu 24 kr. gibt 960
dritte 32 Tage zu 30 kr. gibt 960
120

Die 27. Aufgabe.

§. 99. Es sind drey Fässer, davon das erste voll, die andere zwey leer. Wird das zweyte aus dem ersten gefüllet, bleibt im ersten $\frac{2}{3}$ übrig, wird das dritte aus dem ersten angefüllt, bleibt $\frac{5}{9}$ übrig. Würde man aber das erste aus den beyden andern anfüllen, so fehlten noch 8 Ohm. Wie viel hält jedes von diesen Fässern?

Auflösung.

Das erste halte x

so hält das andere $\frac{x}{3}$, weil $\frac{2}{3}$ im ersten übrig bleiben.

das andere $\frac{4x}{9}$ aus gleicher Ursache

dahero $\frac{x}{3} + \frac{4x}{9} + 8 = x$

mult.) 9 9

$7x + 72 = 9x$
$7x \quad 7x$

Digitized by Google

$$\frac{72}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$36 = x$$

Wie viel die übrigen gehalten, und wie die Probe zu machen, siehet jeder leicht ein.

Die 28. Aufgabe.

§. 100. Ein Vatter vermacht seinem ältesten Sohn zum voraus 1000 fl.; und sodann den fünften Theil von seinem übrigen Vermögen; dem zweyten 2000 fl., und auch den fünften Theil von dem übrigen; dem dritten 3000 fl., und den fünften Theil vom übrigen, u. s. w. bis das ganze Vermögen gar ist. Bey dem theilen bekam einer so viel als der andere. Wie groß war das Vermögen, und wie viel Söhne?

Auflösung.

Das Vermögen sey gewesen x

der erste Sohn bekam 1000, und weil sodann noch $x - 1000$ übrig war, bekam er davon $\frac{1}{5}$, das ist $\frac{x}{5} - 200$, folglich überhaupt $1000 + \frac{x}{5} - 200$, das ist $800 + \frac{x}{5}$

der zweyte bekam 2000, der Rest aber war $x - 800 - \frac{x}{5} - 2000$, das ist $\frac{4x}{5} - 2800$, davon der

fünf-

fünfte Theil $\frac{4x}{25}$ — 560, also zusammen 2000 + $\frac{4x}{25}$ — 560, das ist 1440 + $\frac{4x}{25}$

weil nun einer so viel bekam als der andere, so ist

$$800 + \frac{x}{5} = 1440 + \frac{4x}{25}$$

$$800 \quad 800$$

$$\frac{x}{5} = 640 + \frac{4x}{25}$$

$$\frac{25}{5} \quad \frac{25}{25}$$

$$5x = 16000 + 4x$$

$$\frac{4x}{4x} \quad \frac{4x}{4x}$$

$$x = 16000$$

Wann von diesen 16000 fl. der erste 1000 bekomt und von den übrigen 15000 den 5ten Theil, so hat er 4000. Da aber einer bekomt, was der andere, so müssen es 4 Söhne gewesen seyn, weil 4000 in 16000 viermal enthalten ist.

Die 29. Aufgabe.

§. 101. Vorhergehende Aufgabe allgemein aufzulösen.

Auflösung.

Das Vermögen sey auch $= x$
der erste bekomme a
der zweyte $2a$ u. s. w.

Der

Der Theil sey $\frac{1}{n}$, so ein jeder noch haben soll, dahero

bekomt der erste a und $\frac{1}{n}$ von $x - a$, das ist $a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n}$

der andere $2a$ und $\frac{1}{n}$ von $x - 3a$ $\frac{x}{n} + \frac{a}{n}$ das

ist $2a + \frac{x}{n} - \frac{3a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$

dahero $a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n} = 2a + \frac{x}{n} - \frac{3a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$

$a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n}$ $a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n}$

$0 = a - \frac{2a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$

nn nn

$0 = nna - 2na - x + a$

x x

$x = nna - 2na + a$

$x = (n-1)^2 a$

Da nun der erste oder ein jeder bekomt $a + x : n - a : n$ und der Werth von x, das ist $nna - 2na + a$ darein gesetzt wird, so ists $a + na - 2a + a : n - a : n$, das ist $na - a$ oder $(n-1)a$.

Wird

Wird das, was ein jeder bekomt, in die ganze Summe dividirt, bekomt man die Zahl der Söhne.

$(n-1)^2 a : (n-1) a$, das ist $n-1$

Hieraus folgt die Regel:

Die ganze Verlassenschaft ist $(n-1)^2 a$
einer bekomt $(n-1)\ a$
die Anzahl der Söhne $n-1$

Die 30. Aufgabe.

§. 102. Einer gibt dem nächsten Bettler $\frac{1}{6}$ seines Geldes und 4 kr. drüber; dem andern auch $\frac{1}{6}$ von dem Rest, und 8 kr., dem dritten wieder $\frac{1}{6}$ vom Rest, und 12 kr. u. s. w. bis sein Geld gar ist. Ein Bettler bekam so viel als der andere. Wie viel warens Bettler, und wie viel hatte er Geld?

Auflösung.

Er habe Geld gehabt x

so bekam der erste $\frac{x}{6} + 4$

also war der Rest $\frac{5x}{6} - 4$

$\frac{1}{6}$ davon ist $\frac{5x}{36} - \frac{4}{6}$

daher bekam der andere $\frac{5x}{36} - \frac{4}{6} + 8$

also ist

$-+$

$$\frac{x}{6} + 4 = \frac{5x}{36} - \frac{4}{6} + 8$$

$$\frac{x}{6} = \frac{5x}{36} - \frac{4}{6} + 4$$

$$6x = 5x - 24 + 144$$

$$x = 120$$

Also bekam der erste 24, welches in 120 dividirt 5, oder die Anzahl der Bettler gibt, wie die Probe zeiget.

Die 30. Aufgabe.

§. 103. Vorstehende Aufgabe allgemein zu machen.

Auflösung.

Es seye, wie vorhin, die Summe des Geldes x
an statt $\frac{1}{6}$ seye $1:n$
an statt 4 seye a
so bekomt der erste $x:n+a$
der andere $x:n - x:nn - a:n + 2a$
dahero $x:n - x:nn + 2a - a:n = x:n + a$

$$-x:nn + a - a:n = 0$$

$$a - a:n = x:nn$$

$$nna - na = x$$

$$na(n-1) = x$$

Der

Der erste bekam $x : n + a$, wird nun darein der Werth von x gesetzt, so komt $an - a + a = an$
also bekomt einer an
wird an in die ganze Summe dividirt $(na(n-1) : (an)$, gibt es $n-1$ die Anzahl der Bettler.

Daher diese Regel:

Die Summe des Geldes ist $na\ (n-1)$
einer bekomt na
Bettler sind $n-1$.

Die 31. Aufgabe.

§. 104. Ein Springbrunnen hat 4 Röhren, durch eine wird der Kasten in 2 Stunden voll, durch die andere in 3 Stunden, durch die dritte in 6 Stunden, und durch die vierte in 4 Stunden. Wie bald wird er voll, wen alle 4 zugleich laufen?

Auflösung.

Die gesuchte Zeit seye x
der Inhalt des Kastens y
nun kan man sprechen:

In 2 Stunden wird y voll, was in x? $\frac{xy}{2}$
— 3 — — y — — x? $\frac{xy}{3}$
— 6 — — y — — x? $\frac{xy}{6}$
— 4 — — y — — x? $\frac{xy}{4}$

$\frac{5xy}{4}$

daher ist

$$y = \frac{5xy}{4}$$

$$\frac{y}{y} = \frac{\frac{5x}{4}}{y}$$

$$1 = \frac{5x}{4}$$

$$\frac{4}{4} = \frac{5x}{4}$$

$$\frac{4}{5} = x$$

$\frac{4}{5}$ Stunden sind 48 Minuten, wornach die Probe leicht; denn lauft durch die erste Röhre der Kasten in 120 Minuten voll, so lauft er in 48 Minuten nur $\frac{2}{5}$ voll, und so in den übrigen.

Die 32. Aufgabe.

§. 105. **Ein General stellet seine Soldaten in eine viereckigte Schlachtordnung, und da bleiben ihme 284 Mann übrig. Darauf stellet er in jede Reihe einen Mann mehr, und macht auch eine Reihe weiter, da hat er 25 zu wenig. Wie viel hatte er?**

Auflösung.

Er habe das erstemal in einer Reihe gestellt x

so machte die viereckigte Schlachtordnung xx

folglich waren seine Soldaten zusammen $xx + 284$

stellte

ſtellte er in jede Reihe einen Mann weiter, ſo waren es $x+1$, und alle zuſammen

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x+1 \\ \hline x+1 \\ xx+x \\ \hline xx+2x+1 \end{array}$$

folglich waren ſeine Soldaten zuſammen $xx+2x+1$ — 25

dahero $xx+284=xx+2x-24$

$$\begin{array}{rr} xx & -xx \\ \hline 284= & 2x-24 \\ 24 & 24 \\ \hline 308= & 2x \\ 2 & 2 \\ \hline 154= & x \end{array}$$

dahero machte 154mal 154 und noch 284 die Anzahl ſeiner Soldaten aus, nemlich 24000, oder 155mal 155, weniger 25.

Die 33. Aufgabe.

§. 106. Ein Oberſter hat unter ſich etliche Hauptleute; ein jeder Hauptmann hat noch ſo viel Unterhauptleute unter ſich, als Hauptleute ſind; ein jeder Unterhauptmann hat viermal ſo viel Soldaten als Hauptleute, und jeder Hauptmann hat 9 Soldaten zu ſeiner Bedienung, welches den 200ſten Theil von allen Soldaten macht. Wie viel ſind von jeden?

Auflösung.

Hauptleute waren x
unter jedem Hauptmann Unterhauptleute $2x$
also alle Unterhauptleute zusammen $2xx$
unter jedem Unterhauptmann Soldaten $4x$
daher alle Soldaten zusammen $8x^3$
hat jeder Hauptmann 9 Soldaten, so sind $9x$
folglich $9x = 8x^3 : 200$
$9x = x^3 : 25$
$x \quad x$
$9 = x^2 : 25$
$225 = x^2$
Extr. R.
$15 = x$

Die 34. Aufgabe.

§. 107. Eine Mauer ist $3\frac{1}{2}$mal so lang als breit, und fünfmal so hoch als lang, jeder Cubicschuh daran kostet so viel Gulden als viel Schuh die Breite hat, die ganze Mauer aber 980 Gulden. Wie hoch, breit und lang war sie?

Auflösung.

Die Breite seye x
so ist die Länge $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$mal x, das ist $\frac{7}{2}x$
die Höhe 5mal $\frac{7}{2}x$, das ist $\frac{35}{2}x$
wird Länge, Breite und Höhe in einander multiplicirt, so komt der Inhalt oder die Cubicschuhe heraus, nemlich $\frac{245}{4}x$, jeder davon gilt x fl. folglich zusammen

245

$$245x^4 : 4 = 980$$
$$\frac{4}{245x^4} = \frac{4}{3920}$$
$$\frac{245}{x^4} = \frac{245}{16}$$

Extr. R.)

$$x^2 = 4$$

Extr. R.)

$$x = 2$$

Breite 2
Länge 7
Höhe 35.

Die 35. Aufgabe.

§. 108. Ich habe für jemanden 1202 Rthlr. eingenommen, die ich ihm mit der Post schicken soll. Das Postgeld beträgt $\frac{1}{6}$ Rthlr. von 100; dieses soll ich an meinem Orte bezahlen, und ihm abziehen. Wie viel muß ich ihm also schicken?

Auflösung.

Wann ich ihm die 1202 Rthlr. völlig schickte, so müßte ich das Postgeld aus dem Meinigen bezahlen, wozu ich nicht verbunden bin. Das Postgeld würde so berechnet:

$$100 : 1202 = \tfrac{1}{6} : \tfrac{1202}{6000}$$

Es betrüge also $2\frac{2}{6000} = 2\frac{1}{3000}$ Rthlr. oder 2 Rthaler und $\frac{3}{10}$ eines Kreutzers. Ich muß also weniger als 1202 Rthlr. auf die Post geben, und zwar so, daß das, was ich gebe, mit dem Postgelde zusammen 1202 Rthlr. beträgt. Das, was ich gebe, hieße y; so schließt man, das Postgeld zu finden, so: $100 : \frac{1}{6} = y : \frac{y}{600}$

Und daher ist $y + \frac{y}{600} = 1202$ oder $\frac{601y}{600}$ $= 1202$ oder mit 600 beyderseits multiplicirt $601y = 1202.600$ oder mit 601 beyderseits dividirt $y = \frac{1202.600}{601}$. Weil nun $1202 = 2.601$. so ist $y = \frac{2.601.600}{601} = 2.600 = 1200$, oder ich schicke ihm 1200 Rthaler; diese geben $12.\frac{1}{6} = 2$ Rthaler Postgeld, und machen also mit dem Postgelde zusammen 1202 Rthaler aus.

Allgemein liesse sich dieses so abfassen: Das Postgeld von 100 Rthlr. heisse u; ich habe die Summe a eingenommen; was ich schicke, heißt wieder y; so schließt

man $100 : u = y : \frac{uy}{100}$

Das letzte wäre das Postgeld. Also ist

$y + \frac{1}{100} uy = a$ oder $\frac{(100+u)}{100} y = a$ oder $y = \frac{100a}{100+u}$. Im Exempel wäre $u = \frac{1}{6}$ und $100 + u = 100 + \frac{1}{6} = \frac{601}{6}$.

Zu-

Zusatz.

§. 109. Wann ich jemanden 1000 Rthlr. gegen Interessen zu 5 Procent auf ein Jahr leihe, so müßte er mir am Ende des Jahrs 50 Rthlr. Interessen geben. Gesetzt nun, ich wollte ihm die Interessen gleich beym Anfange abziehen, und gäbe ihm 950 Rthaler, so verführe ich mit ihm ungerecht; denn für ein Darlehn von 950 Rthaler, würde er mir am Ende des Jahres nicht 50 Rthaler Interessen schuldig, sondern nur $47\frac{1}{2}$, daß ich ihm also um $2\frac{1}{2}$ Rthlr. unrecht thäte. Ich muß ihm folglich so viel geben, daß das, was ich ihm gebe, mit den Interessen eines Jahres zusammen, 1000 Rthlr. beträgt, so gibt er mir am Ende des Jahres 1000 Rthlr. wieder; aber keine Interessen, die schon abgerechnet sind. Man sieht leicht, daß dis eben die vorige Frage ist, nur daß der Namen, Interessen, statt Postgeld kömt. Man setze also $u=5$; $a=1000$; so kömt $y=\frac{1000000}{105}=952\frac{8}{21}$ Rthlr.

Probe:	Capital	$952\frac{8}{21}$
Interessen von 950;		$47\frac{1}{2}$
von $2\frac{8}{21}$ oder $\frac{50}{21}$;		$\frac{25}{210}$
	Summe	1000

Die 36. Aufgabe.

§. 110. Aus der gegebenen Summe und Product zweyer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die halbe Differenz dieser Zahlen sey x (§. 76.)

die Summe $= a$,
das Product $= b$,
so ist die grössere $\frac{1}{2}a + x$
die kleinere $\frac{1}{2}a - x$ (§. 109.).

$$-\frac{1}{2}ax - xx$$
$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax$$

Product $\frac{1}{4}aa - xx = b$

$$xx \quad xx$$
$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$
$$b \quad b$$
$$\frac{1}{2}aa - b = xx$$
$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

Extr.R.) $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = x$

Es sey $a = 16$, $b = 63$, so ist $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = \sqrt{64 - 63} = \sqrt{1} = 1$, daher ist die grosse Zahl $= 8 + 1$ oder 9, die kleinere $8 - 1$ oder 7.

Anmerkung.

Wenn man die eine Zahl x, und die andere y hätte nennen wollen, würde man auf eine Aequation verfallen seyn, die man nach bisher gezeigten Gründen nicht würde haben auflösen können, daher man sieht, wie viel am Benennen gelegen sey.

Die 37. Aufgabe.

§. 111. Aus der gegebenen Summe und Quotienten zweyer Zahlen die Zahlen selber zu finden.

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Die Summe seye $= a$, der Quotient $= b$
die eine Zahl $= x$, die andere $= y$
so ist $x + y = a$ $x : y = b$

$y \quad y$ $y \quad y$

$x = a - y$ $x = by$

$a - y = by$

$y \quad y$

$a = by + y$

oder $a = (b + 1)\, y$

$b + 1 \quad b + 1$

$a : (b + 1) = y$

Nun ist $x = by$, oder wenn der Wehrt von y gesetzt wird, $x = ab : (b + 1)$

Es seye $a = 16$, $b = 7$, so ist $x = 16.7 : (7 + 1) = 112 : 8 = 14$ und $y = 16 : (7 + 1) = 16 : 8 = 2$.

Die 38. Aufgabe.

§. 112. Aus der gegebenen Differenz und Product zweyer Zahlen, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Die Differenz sey $= a$, das Product $= b$
die halbe Summe $= x$, so ist
die grosse $x + \frac{1}{2}a$
die kleine $x - \frac{1}{2}a$

Product $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = b$

$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$x^2 = \frac{1}{4}a^2 + b$

$x = \sqrt{a^2 : 4 + b}$

Digitized by Google

Es seye $a=12$, $b=28$, so ist $x=\sqrt{36+28}=\sqrt{64}=8$, also ist die grosse Zahl $=8+6=14$, die kleine $8-6=2$.

Die 39. Aufgabe.

§. 113. Aus der gegebenen Differenz und Quotienten zweyer Zahlen, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Die Differenz sey $=a$, der Quotient $=b$; die beyde Zahlen x und y, so ist

$$\begin{array}{l|l} x-y=a & x:y=b \\ \quad y\quad y & \quad y\quad y \\ \hline x=a+y & x=by \end{array}$$

$$a+y=by$$

$$\begin{array}{r} y\quad y \\ \hline a=by-y \\ b-1\quad b-1 \\ \hline \end{array}$$

$$a:(b-1)=y \text{ folglich } x=ab:(b-1)$$

Es seye $a=18$, $b=7$, so ist $y=18:(7-1)=3$, und $x=21$.

Die 40. Aufgabe.

§. 114. Aus dem gegebenen Product und Quotienten zweyer Zahlen, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Das Product seye $=a$, der Quotient $=b$, die beyden Zahlen x und y, so ist

$xy=$

$$\frac{xy=a}{x=a:y} \qquad \frac{x:y=b}{x=by}$$

$$a:y=by$$

$$a=byy$$

$$a:b=yy$$

$$\sqrt{a:b}=y$$

Will man x haben, so würde es $b\sqrt{a:b}$ geben; weil wir aber noch nicht gezeiget, wie dieser Vorfall zu behandeln, so wollen wir indessen den gemeinen Weg gehen.

$$\frac{xy=a}{y=a:x} \qquad \frac{x:y=b}{x=by}$$

$$x:b=y$$

$$a:x=x:b$$

$$a=x^2:b$$

$$ab=x^2$$

$$\sqrt{ab}=x$$

Es seye $a=63, b=7$, so ist $y=\sqrt{9}=3, x=\sqrt{441}=21$.

Zusatz.

§ 115. Weil $xy.\frac{x}{y}=x^2$ und $xy:\frac{x}{y}=xy.\frac{y}{x}=y^2$; so erhellt folgendes: Das Product von ein Paar Zahlen mit ihrem Quotienten multiplicirt, gibt das Quadrat der Zahl, die im Quotienten

Di-

Dividendus war; und das Product von ein Paar Zahlen mit ihrem Quotienten dividirt, giebt das Quadrat der Zahl, die im Quotienten Divisor war. Diese Multiplication und Division geben also Quadrate, die Rationalwurzeln haben.

Die 41. Aufgabe.

§. 116. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und der Differenz ihrer Quadraten die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Summe sey $= a$, die Differenz $= b$, die halbe Differenz der Zahlen x, so ist die

grosse Zahl $= \frac{1}{2}a + x$

$\frac{1}{2}a + x$

$+\frac{1}{2}ax + x^2$

$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax$

das Quadr. $\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$

die kleine Zahl $\frac{1}{2}a - x$

$\frac{1}{2}a - x$

$-\frac{1}{2}ax + x^2$

$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ax$

das Quadr. $\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$

$\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$

$\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$

Differenz der Quadr. $2ax = b$

$2a \qquad 2a$

$x = b : 2a$

Es

Es seye $a = 11$, $b = 33$, so ist $x = \frac{3}{2}\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, daher ist die grosse Zahl $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$, die kleine $5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 4$.

Die 42. Aufgabe.

§. 117. Aus der gegebenen Differenz zweyer Zahlen und der Summe ihrer Quadraten die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Differenz seye $= a$, die Summe der Quadrate $= b$, die halbe Summe $= x$, so ist
die grosse Zahl $= x + \frac{1}{2}a$
ihr Quadrat $= x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$
die kleine Zahl $= x - \frac{1}{2}a$
ihr Quadrat $= x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$
$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$
$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$

Summe der Quadr. $2x^2 + \frac{1}{2}a^2 = b$

$$x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{2}b$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x = \sqrt{b:2 - a^2:4}$$

Es seye $a = 5$, $b = 73$, so ist $x = \sqrt{73:2 - 25:4} = \sqrt{36\frac{1}{2} - 6\frac{1}{4}} = \sqrt{30\frac{1}{4}} = \sqrt{1\frac{2}{4}\frac{1}{4}} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$, ist also die grosse Zahl $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 8$, die kleine $5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$.

Anmerkung.

§. 118. Es könnten noch eine grosse Menge dergleichen Aufgaben gemacht werden, als aus der Summe und Differenz

ferenz der Quadraten, aus dem Product der Zahlen, und der Differenz der Quadraten, ꝛc. die Zahlen selber zu finden. Es mögen aber diese genug seyn, zumal verschiedene davon solche Aequationen erfordern, die man nach bisherigen Gründen aufzulösen nicht im Stande wäre.

Die 43. Aufgabe.

§. 119. **Aus der gegebenen Tagreise zweyer Boten und der Zeit, da der andere dem ersten nachgehet, die Zeit zu bestimmen, wenn er den ersten einholt.**

Auflösung.

Der erste gehe täglich 5 Meilen, der andere 7 Meilen, der erste seye weg schon 6 Tage, er solle von dem andern eingeholt werden in x Tagen, so ist die Zeit, da der erste lauft $6+x$

und da er täglich 5 Meilen lauft 5

so ist sein ganzer Weg $30+5x$

Die Zeit des andern ist nur x

und täglich gehet er 7

$7x$

Nun laufen sie einen gleichen Weg durch, dahero ist

$$30+5x=7x$$
$$5x \quad 5x$$
$$30=2x$$
$$2 \quad 2$$
$$15=x$$

Die

Die 44. Aufgabe.

§. 120 Eine allgemeine Regel für die vorstehende Aufgabe zu finden.

Auflösung.

Die Tagreise des ersten $= a$
des andern $= b$
die Zeit, da der erste hinweg $= c$
die Zeit, da der andere ihn einholen solle $= x$
so ist des ersten Weg $= c + x$

$$\frac{a}{ac + ax}$$

des andern $= bx$
dahero $bx = ac + ax$

$$\frac{ax \qquad ax}{bx - ax = ac}$$

$$\frac{b - a \quad b - a}{x - ac}$$

$$\frac{}{b - a}$$

Die Regel ist: 1) Multipliciret die Tagreise des ersten mit der Zeit, da er hinweg ist, 2) dividiret das Product mit dem Unterschied der Tagreisen beyder Boten: so habt ihr die gesuchte Zeit.

Die 1. Anmerkung.

§. 121. Diese Aufgabe kann bey der Bewegung aller Körper gebraucht werden, die sich nach einer Gegend bewegen, einer aber geschwinder als der andere, wenn die Weite von einander bekannt, und wie viel jeder in einer gewissen Zeit

Zeit durchlauft. In solchem Falle würde man an statt ac die Weite, die c heissen mag, setzen müssen: denn ac ist nichts anders, als wie weit der erste schon gekommen; b und a aber würde die Grösse der Bewegung in einer gewissen Zeit von jedem Körper seyn. Und dieses gäbe folgende Aequation: $x = c : (b - a)$. Z. E. Anno 1758 auf Johannis, den 24 Junii, auf dem Mittag, stehet die Sonne im vierten Zeichen 2°, 44′, der Mond im 11ten Zeichen 14°, 39′, folglich ist der Mond vom Ende der 12 Zeichen noch entfernet 1 Z. 45°, 21′, die Sonne aber von diesem End oder Anfang der Zeichen 3 Z. 2°, 44′, welches ihre Entfernung zusamen macht 4 Z. 18°, 5′, oder 29826000‴, der Mond läuft in einer Minute 32″. 56‴. oder 1976‴; die Sonne 2″. 28‴. oder 148‴. Nach obenstehender Regel wird die Zeit der Zusammenkunft des Mondes und der Sonne seyn $x = 29826000 : (1976 - 148)$, das ist, 16316 Minuten, oder 11 Tag, 7 Stunden, 56 Minuten. Doch lehret die Astronomie, daß noch einige Ungleichheiten mitberechnet werden müssen.

Die 2. Anmerkung.

§. 122. Wir wollen hier Gelegenheit nehmen zu zeigen, wie vortheilhaft die Buchstaben seyen, durch eine Aufgabe alle dahin einschlagende Aufgaben aufzulösen. In unserer Aufgabe kommen 4 Zahlen vor, nemlich die beyde Tagreisen, die Zeit, da der erste weg, und die Zeit, da er eingeholt wird. Eine jede von diesen Zahlen kann unbekannt, und die übrigen bekannt seyn, woraus 4 Aufgaben entstehen, welche alle aus der Aequation $bx = ac + ax$ aufgelöset werden. Als, es wäre des ersten Tagreise, die Zeit, da er hinweg, und die Zeit, da er eingeholt werden soll, gegeben, die Tagreise des andern zu bestimmen, so dürfte nur b als unbekannt angesehen, und auf eine Seite gebracht werden.

$bx =$

$$\frac{bx = ac + ax}{x \qquad x}$$

$$b = (ac + ax) : x = a(c + x) : x = ac : x + a$$

wird a an ſtatt x geſucht, ſo iſt

$$\frac{xb = ca + ax}{c + x \quad c + x}$$

$$xb : (c + x) = a$$

ſucht man c ſtatt x, ſo iſt

$$\frac{bx = ac + ax}{ax \qquad ax}$$

$$\frac{bx - ax = ac}{a \qquad a}$$

$$(bx - ax) : a = c = x \,(b - a) : a = bx : a - x$$

Wie alles dieſes mit Worten auszudrucken ſey, wird ein jeder einſehen, der der Buchſtabenrechnung nur ein wenig gewohnt iſt.

Die 3. Anmerkung.

§. 123. Es gibt noch mehr hieher gehörige Aufgaben, die aber etwas ſchwerer ſcheinen, wegen vieler dabey vorkommenden Umſtänden, davon folgende Aufgaben zeugen. Ehe wir aber zu denenſelben ſchreiten, wollen wir nur bemerken, daß, wenn Geſchwindigkeiten als bekannt gegeben werden, ſolches ſo viel heiſſe, es ſeye bekannt, wie einen groſſen Raum ein jeder Körper in einerley Zeit durchlaufe. Denn, wenn die Zeiten gleich ſind, verhalten ſich die Geſchwindigkeiten wie die durchlaufene Räume, das iſt, wenn ein Körper in einer Minute 2mal, 3mal, ꝛc. ſo weit komt, als ein anderer in gleicher Zeit, ſo iſt auch ſeine Geſchwindigkeit 2mal, 3mal ꝛc. ſo gros als des andern.

Digitized by Google

Die 45. Aufgabe.

§. 124. Aus der gegebenen Geschwindigkeit zweyer Körper, die sich gegen einerley Gegend bewegen, und ihrer Weite, von einander den Raum zu finden, den der Langsamere noch durchzulaufen hat, bis er von dem Geschwinderen eingeholet wird.

Auflösung.

Die Weite sey $= a$
die Geschwindigkeit des Langsameren verhalte sich zu der Geschwindigkeit des Geschwinderen, wie b zu c
der gesuchte Raum seye $= x$
daher hat der Geschwindere zu durchlaufen $a + x$
der Langsamere aber x
weil nun dieses in gleicher Zeit geschehen soll, so ist (§. 123.).

$$b : c = x : a + x$$

$$cx = ab + bx$$

$$\frac{bx}{cx - bx} \quad \frac{bx}{= ab}$$

$$\frac{cx - bx}{c - b} = \frac{ab}{c - b}$$

$$x = ab : c - b)$$

Die Weite sey 150 Schuh, die Geschwindigkeiten seyen 7 und 4, so ist der gesuchte Raum $150. 4 : (7 - 4.) = 600 : 3 = 200.$

Der 1. Zusatz.

§. 125. Die Aequation $x = ab : (c - b)$ giebt folgende Proportion $c - b : b = a : x$, das ist, wie sich

ſich die Differenz der Geſchwindigkeiten zur kleineren Geſchwindigkeit verhält, ſo verhält ſich die Entfernung zu dem geſuchten Raum.

Der 2. Zuſatz.

§. 126. Weil der geſchwindere Körper $a+x$ durchlaufen muß, ſo muß er auch durchlaufen $a+ab:(c-b)$, oder $(ac-ab+ab):(c-b)$, oder $ac:(c-b)$, welches auch in eine Proportion, wie §. 125, verwechſelt werden kann.

Anmerkung.

§. 127. Man darf ſich nicht befremden laſſen, daß die Proportion (§. 124.) $b:c=x:a+x$ in die Aequation $cx=ab+bx$ verwandelt worden; weil aus der gemeinen Rechenkunſt bekannt, daß bey einer Proportion das Product der beyden äuſſern Glieder dem Product der beyden mittlern gleich ſey. Es läßt ſich dieſes durch Buchſtaben ſehr leicht erweiſen, das erſte Glied ſey $=a$, der Exponent $=m$, ſo iſt das zweyte Glied $=am$; es ſeye das dritte $=b$, ſo iſt das vierte $=bm$, folglich iſt

$$\begin{array}{rr} a : am = b : bm \\ b \qquad\quad a \\ \hline amb = amb \end{array}$$

Die 46. Aufgabe.

§. 128. Ein Haas hat 780 Sprünge vor einem Hund voraus; der Hund, der ihn verfolgt, thut 4 Sprüng bis der Haas 3 thut, und 7 Haasensprüng betragen 5 Hundssprünge. Wie viel

Sprünge hat der Haas noch zu thun, bis ihn der Hund einholt?

Auflösung.

Könnte man die Geschwindigkeiten des Haasens und des Hundes mit einander vergleichen, so liesse sich diese Aufgabe auf vorige bringen. Diese Vergleichung geschicht folgendergestalt: Der Hund legt mit 5 Sprüngen so viel Raum zurück, als der Haase mit 7. In dieser Bedeutung gleichen 5 Hundssprünge 7 Haasensprüngen; oder: 1 Hundssprung $= \frac{7}{5}$ Haasensprüngen. Nun thut der Hund 4 Sprünge in der Zeit, da der Haase 3 thut; der Hund legt also einen Raum von $4.\frac{7}{5}$ Haasensprüngen in der Zeit zurück, in welcher der Haase einen Raum von 3 seiner Sprünge zurück legt. Also verhalten sich die Geschwindigkeiten des Hundes und des Haasens $= 4.7 : 5$. Der Haase ist also der Langsamere unter den beyden (124. §.) und man setze in dasiger Gleichung, wo x gefunden wird, $b = 3$; $c = 4.7 : 5$; $a = 780$, so ist $c - b = \frac{4.7}{5} - 3$ und $x = 780.3 : (\frac{4.7}{5} - 3)$ oder $= 780.3 : \frac{(4.7 - 3.5)}{5}$ das ist $780.3.5 = \frac{780.3.5}{28 - 15}$. Nun ist $780 = 390.2 = 130.3.2 = 13.10.3.2 = 13.60$. also $\frac{780.3.5}{13} = 13$.

$= \frac{13.60\ 3.\ 5}{13} = 60.3.\ 5 = 900$, so viel Sprünge hat der Haase noch zu thun.

Anmerkung.

§. 129. In der Formul für $x = 780.3 : (4.7 \frac{}{5} - 3)$ ist die Rechnung mit den Zahlen nur durch Zeichen angedeutet, nicht wirklich verrichtet worden, weil man auf diese Art leicht allgemeine Regeln für andere Zahlen, die statt der vorigen gesetzt wurden, entdecket. Die Regeln wären diese: 1) Man berechne, wie viel ein Hundssprung in Haasensprüng ausgedruckt beträgt (hier $\frac{7}{5}$). Dieses multiplicire man mit der Zahl, welche anzeigt, wie viel Sprünge der Hund (hier 4) in der Zeit thut, in welcher der Haase auf eine gegebene Menge Sprünge (hier 3) thut. 2) Hievon subtrahire man die gegebene Menge der Haasensprünge, die in eben der Zeit mit dem Hundssprunge geschehen (hier 3.). 3) Man spreche, wie diese Differenz zu der in 2) gegebenen Menge der Haasensprünge, so die Sprünge, die der Haase im voraus hat, zu einer vierten Zahl. Die vierte Zahl ist, was man sucht Was in Worten so weitläuftig gesagt wird, stellen die Zeichen einem einzigen Blicke dar. Will man statt der bestimmten Zahlen die Aufgabe in Buchstaben ausdrucken, so setze man a statt 780; b statt 4; c statt 3, (da aber dieses b und c nicht das bedeuten, was sie in (124. §. bedeuten) d statt 7; f statt 5; so ist $x = ac : (\frac{bd}{f} - c)$. Man multiplicire Divisor und Dividendus mit f, so komt $x = acf : b - d - fc)$. Auch in

besondern Exempeln ist es vortheilhaft, die Rechnung mit den Zahlen nicht sogleich zu machen, sondern nur anzudeuten, weil man da leichter sieht, was für Zahlen sich durch die Division u. s. w. aufheben. So zerfällte man im jetzigen Exempel 780 in 390. 2, welches leicht bewerkstelliget wird, wann man in Gedanken 780 mit 2 dividirt. Alsdenn ist leicht zu übersehen, daß $390 = 130.3$ u. s. w. Man findet also für den Werth von x; leichter 900, als wenn man ohne diese Factoren den Divisor und Dividendus gemeinschaftlich weggelassen, und mit gewissen Zahlen wirklich gerechnet hätte.

Der 1. Zusatz.

§. 130. Weil der Hund durchlaufen muß $a+x$, so durchlauft er auch $a+acf:(bd-fc) = (abd-afc+afc):(bd-fc) = abd:(bd-fc)$.

Der 2. Zusatz.

§. 131. Weilen $abd:(bd-fc)$ den Lauf des Hunds in Haasensprüngen vorstellt und die Haasensprünge sich zu den Hundssprüngen verhalten, wie d zu f, so ist $d:f = abd:(bd-fc) : abf:(bd-fc)$ das ist, der Hund hat $abf:(bd-fc)$ oder $ab:(bd:f-c)$ Sprünge zu thun.

Anmerkung.

§. 132. In vorstehender Aufgabe kommen 6 Zahlen vor, davon auch eine jede unbekannt, und die übrige bekannt seyn können, woraus 6 Aufgaben entstünden, (§. 122.) die man aber zu formiren dem geneigten Leser überläßt.

Die 47. Aufgabe.

§. 133. Zween Boten gehen gegen einander: zu bestimmen, wenn sie einander begegnen, aus der gege-

gegebenen Weite der Oerter, beyder Tagreisen und der Zeit, um welche einer früher gehet als der andere.

Auflösung.

Die Zeit, um welche der erste früher ausgehet als der andere sey $= a$.
die Tagreise des ersten $= b$.
des andern um n grösser oder kleiner, dahero $b+n$. oder $b-n$.
die Weite der Oerter $= d$.
die Zeit, da der andere ausgehet, bis sie einander begegnen $= x$.
dahero ist die Zeit des ersten $= a+x$

deßen Weg $= ab+bx$
der Weg des andern $= bx+nx$

$$ab+2bx+nx=d$$
$$\frac{ab}{} \qquad \frac{ab}{}$$
$$2bx+nx=d-ab$$
$$\frac{2b+n}{} \qquad \frac{2b+n}{}$$
$$x=\frac{d-ab}{2b+n}$$

Es seye $a=3$, $b=5$, $n=1$, $d=92$, so ist $x=(92-3,5):(2.5+1)=(92-15):11=77:11=7$.

Der 1. Zusatz.

§. 134. Gehen sie zu gleicher Zeit aus, so wird $a=o$ und $(d-ab):(2b+n)=(d-ob):(2b+n)=d:(2b+n)$.

Digitized by Google

Der 2. Zusatz.

§. 135. Ist die Zeit der Zusammenkunft bekannt, und man will die Tagreis des ersten wissen, so siehet man nur b als unbekannt, x aber als bekannt an, und sucht b auf eine Seite zu bringen.

$$ab + 2bx + nx = d$$
$$nx \qquad nx$$
$$ab + 2bx = d - nx$$
$$a + 2x \qquad a + 2x$$
$$b = d - nx$$
$$a + 2x$$

Der 3. Zusatz.

§. 136. Wäre alles bekannt, und hätte man nur noch zu finden, wie viel einer des Tags weiter gegangen wäre als der andere, müßte n auf eine Seite gebracht werden.

$$ab + 2bx + nx = d$$
$$nx = d - ab - 2bx$$
$$n = d - ab - 2bx$$
$$x$$

Der 4. Zusatz.

§. 137. Eben so kan man finden, um wie viel der erste früher ausgegangen.

$$ab + 2bx + nx = d$$
$$ab = d - 2bx - nx$$

$a =$

$$a = \frac{d - 2bx - nx}{b}$$

Der 5. Zusatz.

§. 138. Wäre des andern Tagreise um n kleiner als des ersten, so wäre sie $b - n$. Woraus erhellet, daß in diesem Fall n allezeit das gegenseitige Zeichen haben müsse, als §. 133. statt $x = (d - ab) : (2b + n)$, $x = (d - ab) : (2b - n)$ und §. 135. $b = (d + nx) : (a + 2x)$ ꝛc. ꝛc.

Anmerkung.

§. 139. In dieser an sich sehr leichten Aufgabe sind mit Vorbedacht fast alle mögliche Fälle noch einmal, wie (§. 122.), zusammen gezogen, und die besondere Fälle daraus hergeleitet worden, um die Anfänger nach und nach vorzubereiten, ein gleiches in schwereren Aufgaben anzuwenden. Man siehet hieraus, daß in besondern Fällen einige Grössen $= 0$ (§. 134.) imgleichen $+$ und $-$ verwechselt (§. 138.) werden können, nicht weniger, daß eine einige Aequation sehr viele Aufgaben aufzulösen hinreiche. Eben so wird man unvermerkt angewöhnt, auch in andern nicht in die Mathematik einschlagenden Dingen alle Fälle aus allgemeinen Sätzen herzuleiten, daß einem keiner leicht entwischet.

Die 48. Aufgabe.

§. 140. Aus dem gegebenen Preis einer Maas guten Weins zu bestimmen, wie viel von einem geringeren, dessen Preis auch bekannt, darunter gemischet werden müsse, daß er um einen verlangten Preis gegeben werden könne.

Digitized by Google

Auflösung.

Der Preis des guten seye $= a$
des geringern $= b$
der verlangte mittlere Preis $= c$
weil weder von dem guten noch schlechten eine ganze Maas genommen werden kan, sondern von jedem nur ein Theil oder ein Bruch, so sey ein solcher Theil von dem guten $= x$.
so muß von dem geringern das übrige, bis es ein Ganzes oder 1 gibt, genommen werden, das ist $1 - x$.
gilt nun ein Maas vom geringern b, so gilt $1 - x$ $b - bx$.
auf gleiche Art vom guten ax
beyde zusammen $b - bx + ax = c$

$$\begin{array}{rr} b & b \\ \hline ax - bx = c - b & \\ a - b \quad a - b & \\ \hline x = \dfrac{c - b}{a - b} & \end{array}$$

vom geringern $1 - x$ oder $1 - (c+b) : (a - b) = (a - b - c + b) : (a - b) = (a - c) : (a - b)$.
es seye $a = 32$ kr. $b = 18$, $c = 24$, so ist $x = (24 - 18) : (32 - 18) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, der geringere $= (32 - 24) : (32 - 18) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.

Der 1. Zusatz.

§. 141 Weil nun die Grösse des guten $= (c - b) : (a - b)$, des geringern $= (a - c) : (a - b)$, so verhalten sie sich, wie $(c - b) : (a - b)$ zu $(a - c : (a - b)$ oder $c - b : a - c$, das ist, wenn der gute sich zum geringern ver-

Digitized by Google

verhält, wie die Differenz des mittleren und geringeren Preises zur Differenz des mittleren und höheren Preises, so hat man den verlangten Preis. Als in vorigem Exempel 24 — 18 : 32 — 24, oder 6 : 8, das ist, vom guten 6, vom schlechten 8, oder 3 und 4.

Der 2. Zusatz.

§. 142. Will man Wasser an statt des geringeren unter den guten mischen, welches nichts gilt, so ist $b = 0$ und $x = (c - 0) : (a - 0) = c : a$, folglich von dem Wasser $1 - c : a = (a - c) : a$, daß sich das Wasser zum Wein verhält, wie $(a - c) : a$ zu $c : a$ oder $a - c$ zu c

Die 1. Anmerkung.

§. 143. Daß eben diese Aufgabe auch auf andere zu vermischende Dinge angewendet werden könne, wird man leicht einsehen. Als gut und geringer Silber zu mischen, wobey aber zu merken, daß das Silber nach der Mark oder 16 Loth geschätzt werde, daß, so in 16 Lothen 13 Loth Silber und 3 Loth Kupfer, solches 13löthig Silber genennet werde, das unter das Silber gemischte Kupfer aber wird angesehen, als hätte es keinen Werth.

Die 2. Anmerkung.

§. 144. Hieher gehöret auch Archimedis Kronenprobe. König Hiero gab einem Goldschmidt 18 Pfundt Gold, eine Krone daraus zu verfertigen Die Krone hatte zwar das Gewicht, man merkte aber, daß Silber darunter gemischt sey. Dem Archemedi wurde aufgetragen, die Sache zu untersuchen. Er fande, daß ein Körper, wenn er ins Wasser gehänget worden, etwas weniger wäge, nemlich so viel, als das Wasser gewogen, dessen Platz er eingenommen;

nommen; nim aber nimmt ein Pfundt Gold weniger Platz ein, als ein Pfundt Silber, weil jenes von schwererer Art ist, als dieses, dahero verliehrt auch jenes weniger von seinem Gewicht im Wasser als dieses, ein aus beyden vermischtes aber mehr, als Gold, und weniger als Silber, wie daraus zu finden seye, wie viel von jedem in dem ganzen Klumpen enthalten, wollen wir in folgendem sehen.

Die 49. Aufgabe.

§. 145. Aus dem gegebenen Gewichte eines aus zweyerley Metallen zusammen geschmolzenen Klumpens, und wie viel solcher am Gewicht verliehrt, desgleichen wie viel ein jedes gleich schweres vor sich ungemischt im Wasser verliehrt, zu finden, wie viel von jedem Metalle in dem Klumpen sey?

Auflösung.

Der Klumpe woge $= p$
er verliere im Wasser c
das schwerere Metall von gleichem Gewicht verliehre $= a$
das leichtere $= b$
der Theil von dem leichteren sey $= x$
so ist der Theil vom schwereren $= p - x$
wenn nun das Gewicht p vom leichtern b verliehrt, so verliehrt x, $bx : p$
desgleichen verliehrt der Theil des schwerern $(ap - ax) : p$
beyde zusammen $(bx + ap - ax) : p = c$

$$\frac{p \qquad p}{bx + ap - ax = pc}$$

$$\frac{ap \qquad ap}{(b - a)x = (c - a)p}$$

(b—

$$\frac{(b-a)\,x}{b-a} = \frac{(c-a)\,p}{b-a}$$

$$x = (c-a)p : (b-a)$$

das schwerere wird seyn $p-(pc+pa) : (b-a) = (bp-ap-pc+pa) : (b-a) = (bp-cp) : (b-a) = (b-c)p : (b-a)$

Gesetzt die Krone wog 18 Pfundt, und verlohr in Wasser $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ Pfundt; aber 18 Pfundt Gold verliehren 1 Pfundt; und 18 Pfundt Silber $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Pfundt, so ist $p = 18$; $c = \frac{4}{3}$; $a = 1$; $b = \frac{3}{2}$; und $x = \frac{(\frac{4}{3} - 1)\,18}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{3}.18}{\frac{1}{2}} = \frac{2.18}{3} = 2.6 = 12$; so viel Pfundt Silber waren in der Krone, und $18-12=6$ Pfundt Gold.

Probe. Man suche, wie viel 12 Pfundt Silber im Wasser verliehren, durch folgende Proportion: $18 : 12 = \frac{3}{2} : \frac{3.12}{2.18}$ Weil diese vierte Zahl $= 1$, so werden von 12 Pfundt Silber 1 Pfundt verlohren. Es ist nemlich $\frac{3}{2}$ Pfundt oder der Verlust, den 18 Pfundt Silber im Wasser leiden, der zwölfte Theil von 18 Pfundt. Eben so ist der Verlust, den 18 Pfundt Gold leiden, der achtzehende Theil von 18 Pfundten; folglich werden 6 Pfundt Gold auch ihren achtzehenden Theil, nemlich $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ Pfundt verliehren. Die 12 Pfundt Silber und die 6 Pfundt Gold zusammen verliehren also $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ Pfundt, wie gehörig.

Diese

Diese Rechnung setzt zum voraus, daß wenn 12 Pfundt Silber und 6 Pfundt Gold mit einander vermischt sind, jenes 1 Pfundt, dieses $\frac{1}{3}$ Pfundt verliehren wird, eben wie jedem wiederfuhre, wann es mit dem andern unvermischt wäre. Diese Voraussetzung aber muß geprüft werden, und die Prüfung wird sie nicht bestätigen. Man sehe Käſtners Anfangsgründe der angewandten Mathematik; Hydrostatik 54 §. nach denen daselbst 49 §. angegebenen Zahlen wird für den Verluſt des Goldes und des Silbers etwas anders gesetzet.

Zusatz.

§. 146. Also verhält sich das leichtere zum schwereren, wie $(c-a)p:(b-a)$ zu $(b-c)p:(b-a)$ oder $c-a:b-c$.

Die 50. Aufgabe.

§. 147. Die Eigenschaften des Quadrats zu finden, wenn die Wurzel zwey Theile hat.

Auflösung.

Die zwey Theile seyen a und b, so ist die Wurzel

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+.ab+bb \end{array}$$

Hieraus ist klar, daß das Quadrat drey Theile habe, wenn die Wurzel zwey hat. 1) Das Quadrat des ersten Theils aa. 2) Das doppelte Product des ersten a, in den andern b, $2ab$. 3) Das Quadrat des 2 Theils bb.

Anmerkung.

§. 148. Wie daraus die Regeln aus einer jeden Zahl die Quadratwurzel zu ziehen gefunden werden, wird in der gemeinen Rechenkunſt gelehret.

Zuſatz.

§. 149. Hätte die Wurzel 3 Theile, als $a+c+d$, ſo würde an ſtatt b ſtehen $c+d$, dahero müßte das Quadrat von $a+c+d$ beſtehen 1) aus dem Quadrat $a=a^2$, 2) aus $2a$ in $c+d=2ac+2ad$ 3) aus dem Quadrat von $c+d=c^2+2cd+d^2$. Woraus erhellet, daß einer dreytheiligen Wurzel Quadrat beſtehe aus den Quadraten eines jeden Theils und den doppelten Producten eines jeden Theils in jeden andern, welche Regel von allen vieltheiligen Wurzeln gilt, wie eben ſo leicht zu zeigen iſt.

Die 9. Erklärung.

§. 150. Eine unreine quadratiſche Gleichung iſt, in welcher die unbekannte Gröſſe die erſte und zweyte Dignität hat. Dergleichen ſind:

$A)\ x^2 - 16x + 55 = 0$
$B)\ x^2 = 4x + 21;$
$C)\ x^2 = px + q$

Man könnte ſolche Gleichungen folgendergeſtalt bekommen: Wenn man von einer willkührlichen Zahl, z. E. 7, das Quadrat 49 machte; und eben ſo ſie mit einer willkührlichen Zahl, z. E. 4, multiplicirte; und nun ſuchte, um wie viel das Quadrat gröſſer iſt, als das vierfache, ſo würde man finden, daß $7.7 = 4.7 + 21$. Man könnte alſo einem andern das arithmetiſche Rätzel aufgeben:

geben: Eine Zahl zu finden, deren Quadrat heraus kömt, wenn man 21 zu ihrem Vierfachen addirt. Dieses Räzel in der algebraischen Sprache ausgedruckt, ist die Gleichung *B*).

Eben so könnte man durch einen Versuch gefunden haben, daß der Zahl 5 ihr Quadrat übrig bleibt, wenn man 55 von ihrem Sechszehnfachen abzieht, das ist, daß $5.5 = 16.5 - 55$ oder auf beyden Seiten 55 addirt $5.5 + 55 = 16\ 5$ und auf beyden Seiten 16. 5 abgezogen, $5.5 - 16.5 + 55 = 0$, welches in eben dergleichen algebraisches Räzel verwandelt, die Gleichung *A*) giebt,

Weil man durch addiren und subtrahiren allemal, welche Glieder der Gleichung man will, auf eine oder die andere Seite des Gleichheitszeichen bringt (§. 71.), so läßt sich jede unreine quadratische Gleichung auf die Art, wie *C*), ausdrucken.

Nun können p, q, was für Zahlen man will, bejahte oder verneinte bedeuten, und so stellt *C*) jede unreine quadratische Gleichung vor.

Ist nemlich $p = 4$, $q = 21$, so verwandelt sie sich in *A*; mit der muß man folgende Vorbereitung machen:

$$\begin{array}{r} x^2 - 16x + 55 = 0 \\ 16x = 16x \text{ addirt} \\ \hline x^2 + 55 = 16x \\ 55 = 55 \text{ abgezogen} \\ \hline x^2 = 16x - 55 \end{array}$$

Diese Gleichung nun wird aus *C*, wenn $p = +16$, $q = -55$

Eine bekannte Grösse, welche mit irgend einer Potenz der unbekannten multiplicirt ist, heißt ein Coefficient.

In

In *A* sind die Coefficienten: 1 beym Quadrate, —16 bey der ersten Potenz, +55 bey x^0 (§. 60.). In *B* sind sie: 1 beym Quadrate, 4 bey der ersten Potenz 21, bey der deren Exponent = 0. In *C* sind sie: 1 bey der zweyten, *p* bey der ersten, *q* bey der deren Exponent = 0.

Die 51. Aufgabe.

§. 151. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

I. Zur Vorbereitung ist zu zeigen nöthig, wie reine quadratische Gleichungen aufgelöset werden, wo nemlich allein das Quadrat der unbekannten Grösse, nicht ihre erste Potenz enthalten ist, wie §. 106. 107. 109. 112.

Man suche nemlich die Zahl *f*, deren Quadrat = *f*, also $z^2 = f$, so ist $z = \sqrt{f}$.

Diese Quadratwurzel aus *f* mag als bejaht oder als verneint angesehen werden, so gibt sie beydemale einerley bejahtes Quadrat (§. 41.) Folglich ist *z* entweder $+\sqrt{f}$, oder $-\sqrt{f}$, welches man so ausdruckt: $z = +\sqrt{f}$.

Exempel. Man suche die Zahl, deren Quadrat 25 ist, oder es sey $z^2 = 25$, so ist $f = 25$. $\sqrt{f} = 5$, und $z = +5$, nemlich $(+5)^2 = +25$, und auch $(-5)^2 = +25$.

II. Es gibt Fälle, wo die Natur der Frage nicht verstattet, die Zahl, die man sucht, für verneint anzunehmen. So ware im 106. §. $(-15)^2$ eben so wohl $+225$ als $(+15)^2$ und im 107. § entsteht das Quadrat $+4$ eben so wohl von -2 als von $+2$. Aber weder die Menge der Hauptleute, noch die Breite können verneint seyn. Also entscheidet hier die besondere Bedeu-

tung der Zahlen etwas, das die blos authentische Auflösung unbestimmt liesse; nemlich in den beyden Gleichungen $225 = x^2$, $x^2 = 4$, kann x so wohl was bejahtes als verneintes bedeuten; aber eine verneinte Grösse kann das nicht bedeuten, was in den Aufgaben gesucht wird.

III. Manchmal ist es gleichgültig, wo man den bejahten oder den verneinten Wehrt brauchen will. Im 110. §. sollte man eigentlich schliessen: $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$ das obere Zeichen gäbe.

Die grössere Zahl $= \frac{1}{2}x + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$

" " kleinere " " $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Das untere Zeichen gäbe

$\frac{1}{2}a + x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$

$\frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$ (§. 35.).

das ist $\frac{1}{2}a + x$ wurde nun die kleinere, $\frac{1}{2}a - x$ die grössere, weil x etwas verneinendes bedeutet.

IV. Bey solchen Umständen wie II, III, muß man doch den Grund anzugeben wissen, wann man von den beyden Wehrten der unbekannten Grössen nur den bejahten braucht. In anderen Fällen aber erhält man nicht alle Zahlen, die der Frage genug thun, wenn man nicht auf diese Zweydeutigkeit der Wurzel acht gibt. So ist eigentlich im 112. §. $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)}$; das untere Zeichen gibt für die dorten gesuchten Zahlen zwo verneinte. Im dortigen Exempel ist $x = \pm 8$, und bey deren Gebrauche des untern Zeichens, die eine Zahl $-8 + 6 = -2$; die andere $-8 - 6 = -14$. Dieser beyden Zahlen halbe Summe ist -8; ihre Differenz ist, was heraus kömt, wenn man -14 von -2 abzieht, oder $-2 = (-14) = +12$ (§. 37.). Ihr Product $-14 \cdot -2 = +28$ (§. 47.)

Die

Die Differenz zu finden, ziehe ich — 14 von — 2 ab, weil — 14 für kleiner als — 2 anzusehen ist. Von zwo negativen Zahlen ist nemlich die gröſſere negative als kleinere anzusehen. Dieſes gründet ſich darauf. Kleinere heißt dasjenige, wozu was hinzu kommen muß, alſo was bejahtes addirt werden muß, das gröſſere zu erhalten. So iſt 5 kleiner als 12, weil 7 zu 5 kommen muß, wenn 12 zu erhalten. Wenn man nun — 14 in — 2 verwandeln will, ſo muß man + 12 zu — 14 addiren, das iſt, es muß + 12 zu — 14 kommen, damit daraus — 2 wird. Alſo iſt — 14 kleiner als — 2. Dieſe Bemerkung, daß eine gröſſere negative Zahl, kleiner als die nicht ſo groſſe negative iſt, hat überall ihren Nutzen, wo man kleinere und gröſſere Zahlen gegen einander hält. In eben der Bedeutung ſagt man: jede verneinte Gröſſe ſey weniger als Nichts, weil man zu ihr etwas addiren muß, um Nichts zu bekommen. Z. E. Zu — 3 muß + 3 addirt werden, ſo iſt — 3 + 3 = 0. Und noch vielmehr alſo, iſt jede verneinte Gröſſe, kleiner als jede bejahte, da die bejahte allemal mehr als Nichts iſt. So iſt — 10 kleiner als + 2, denn man muß + 12 zu — 10 addiren, um + 2 daraus zu machen.

V. Eben aus §. 41. folgt, daß jedes Quadrat eine bejahte Gröſſe iſt. Ein verneintes Product entſtehet aus zween Factoren, nur wenn ſie entgegen geſetzte Zeichen haben, und da ſind ſie nicht einerley, wenn ſie auch ſonſt einerley nur entgegen geſetzte Gröſſen hätten. So iſt + 5. — 5 = — 25; aber kein Quadrat, denn + 5 iſt nicht einerley mit — 5; ſo wenig es einerley iſt, 5 Thaler zu beſitzen, und 5 Thaler ſchuldig ſeyn. Wenn alſo nicht + 5 = — 5: ſo iſt — 25 kein Product aus zween gleichen Factorn.

VI. Wer also eine verneinte Gröſſe ein Quadrat nennt, der sagt etwas, das sich selbst widerspricht. Wer das z in der Gleichung $z = -25$ anzugeben verlangt, der verlangt was Unmögliches. Man würde dieses so ausdrücken: $z = \pm\sqrt{-25}$. Eine Quadratwurzel aus einer verneinten Gröſſe ist also nichts, als ein Zeichen ohne Begriff. Es heißt: eine unmögliche Gröſſe (quantitas imaginaria.)

VII. Wenn man bey Auflösung einer Aufgabe auf solche unmögliche Gröſſen komt, so zeigt dieses an, es werde was unmögliches verlangt. Dergleichen wäre im 109. §. wenn $\frac{1}{4}aa < b$. Man fand nemlich in der Rechnung, welche zu der dasigen Auflösung führte, $\frac{1}{4}aa - xx = b$; nun ist xx allemal etwas bejahtes (V) also allemal $\frac{1}{4}aa - xx < \frac{1}{4}aa$ (§. 29.). Weil also b heraus kömt, wenn man $\frac{1}{4}aa$ um was vermindert, so ist allemal $\frac{1}{4}aa > b$.

Man setze $a = 12$; $b = 52$; so wäre $x = \sqrt{(36 - 52)} = \sqrt{-16}$. Weil nun -16 kein Quadrat seyn kan, so kan es auch keine Zahlen geben, deren Summe 16; das Product 52 wäre.

VIII. Nun kann man zu Auflösung der unreinen Gleichungen schreiten. Es wird, der Deutlichkeit wegen, gut seyn, zuerst ein Exempel vorzunehmen.

IX. Bey der Gleichung (*A*) verfahre man so:

$$x^2 - 16x + 55 = 0$$

$$55 = 55 \text{ abgezogen}$$

$$x^2 - 16x = -55$$

Unter dieser Gestalt sagt die Gleichung folgendes: Die unbekannte Gröſſe sechszehenmal genommen, sey um 55 gröſſer als ihr Quadrat. Man nehme die Hälfte des Coefficienten (§. 150.) bey x, sie ist -8; und nun mache man das Quadrat $x - 8$. Es ist $x^2 - 16x + 64$ (§. 147.). Man würde also $x^2 - 16x$ in dieses Quadrat

drat verwandeln, wenn man + 64 dazu addirte. Aber die Gleichheit zu erhalten, muß man eben diese 64 zu — 55 addiren. So steht die Rechnung folgendergestalt:

$$x^2 - 16x = -55$$
$$+ 64 = + 64 \text{ addirt}$$
$$x^2 - 16x + 64 = 64 - 55 = +9$$

das ist

$$(x-8)^2 = 9$$
$$x - 8 = \pm\sqrt{9} \text{ oder}$$
$$x - 8 = \pm 3$$
$$8 = 8 \text{ addirt}$$
$$x = 8 \pm 3$$

Dieses giebt also x entweder $= 11$ oder $= 5$. Wer also die Gleichungen, wie 150. §. beschrieben worden, durch einen Versuch mit der 5 gefunden hätte, und sie als ein Rätzel anfgäbe, der würde zu seiner Verwunderung finden, daß die Antwort auf sein Rätzel nicht nur 5, sondern auch 11 ist. Denn $11^2 - 16$. $11 + 55 = 121 - 176 + 55 = 0$.

X. Aus dem Verfahren mit diesem Exempel kann man leicht die allgemeine Methode einsehen. Die beyden Theile der Gleichungen, welche der unbekannten Grösse Quadrat und ihre erste Potenz enthalten sehe man als zwey Glieder eines Quadrats an, dessen Wurzel aus der unbekannten Grösse und einer bekannten bestünde. Diese bekannte muß die Hälfte des Coefficienten bey x seyn, bejaht oder verneint, wie derselbe ist. Man macht also das Quadrat dieser Hälfte, und addirt solches zu den beyden Theilen der Gleichung, welche der unbekannten Grösse Quadrat und ihre erste Potenz enthalten. So machen diese beyde Theile mit dem, was

man dazu addirt, zusammen ein Quadrat aus, dessen Wurzel die unbekannte Grösse und die Hälfte des Coefficienten bey x sind. Um nun die Gleichheit zu erhalten, muß man das Quadrat des halben Coefficienten auch zu der bekannten Zahl addiren, die man zuvor auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, den unbekannten gegen über, gebracht hat.

XI. Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wird man verstehen können, wie mit der Gleichung zu verfahren ist, die alle quadratische vorstellt. (150.).

$$x^2 = px + q$$
$$px = px \text{ abgezogen}$$
$$x^2 - px = q$$

Man suche, was auf der linken Seite muß addirt werden, ein vollkommenes Quadrat zu erhalten. Dieses heraus zu bringen, mache man $(x+e)^2 = x^2 + 2ex + e^2$ (§. 147, und setze, es soll $2ex = -px$ seyn, so ist $2e = -p$, und $e = -\frac{1}{2}p$; und $x + e = x - \frac{1}{2}p$. Man muß also das Quadrat von $x - \frac{1}{2}p$ machen, dieses ist $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$. Hierinn nun $x^2 - px$ zu verwandeln, verfährt man so:

$$x^2 - px = q$$
$$\frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp \text{ addirt}$$
$$x^2 - px + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$$

oder

$$(x - \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}pp + q$$

auf beyden Seiten die Wurzel ausgezogen

$$x - \tfrac{1}{2}p = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + q)}$$
$$\tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}p \text{ addirt}$$
$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + q)}$$

Nach welcher Formel alle quadratische Gleichungen aufgelöst werden, wenn man nur statt p, q, die gehörigen Wehrte setzt.

Im

In A (§. 190.) ist $p = 16$; $q = -55$; also $(\frac{1}{2}p)^2$ oder $\frac{1}{4}pp = 64$; und $\frac{1}{4}pp - q = 64 - 55 = +9$ folglich $x = 8 \pm \sqrt{9}$ wie in IX. Vermöge der gegenwärtigen Rechnung mit den Buchstaben erspart man sich die Mühe, die Rechnung für jedes Exempel in Zahlen besonders zu wiederholen.

In B (§. 150.) ist $p = 4$; $q = 21$.
Also $\frac{1}{4}pp + q = 4 + 21 = 25$; die Quadratwurze daraus $= 5$; also $x = 2 \pm 5$ oder
ein Wehrt von x ist $= 7$; der andere -3; nemlich
$+7 \cdot 7 = 4 \cdot 7 + 21$ und
$(-3)^2 = 4 \cdot -3 + 21$ weil $4 \cdot -3 = -12$
und $-12 + 21 = +9$

Zusatz.

§. 152. In jeder quadratischen Gleichung hat die unbekannte Grösse zweene Wehrte; beyde möglich, wenn $\frac{1}{4}pp + q$ bejaht; beyde unmöglich, wenn diese Grösse verneint ist. Nun ist $\frac{1}{4}pp$ das Quadrat der Hälfte des Coefficienten bey x; allemahl bejaht, der Coefficient mag bejaht oder verneint seyn. (151. V) ist also die völlig bekannte Zahl q bejaht, (wie in B;) so sind allemal beyde Wurzeln möglich. (Es versteht sich, daß die Gleichung die Form hat, wie C in 150.) Ist aber die gegebene Zahl q was verneintes (wie in A) so muß sie kleiner als das Quadrat des halben Coefficienten seyn, wenn beyde Wehrte von x möglich und unterschieden seyn sollen. Ist sie gerade so groß, so sind beyde Wehrte gleich; ist sie gröſſer, so sind beyde unmöglich.

Exempel für gleiche Wehrte: $x^2 = 6x - 9$; wo $\frac{1}{2}p = 3$; $q = -9$ und $x = 3 \pm \sqrt{(9-9)} = 3$.

Diese Gleichung ist nemlich so viel als
$x^2 - 6x + 9 = 0$ oder $(x-3)^2 = 0$

Exempel für unmögliche Wehrte:

$x^2 = 8x - 20$; wo $p = 8$; $q = -20$;
$x = 4 + \sqrt{(16-20)} = 4 + \sqrt{-4}$. Es gibt also keine Zahl, deren Quadrat heraus käme, wenn man 20 von ihrem achtfachen abzieht.

Die 52. Aufgabe.

§. 153. Ein Hauptmann theilt 1200 fl. unter seine Soldaten, und ein anderer auch so viel fl. unter die Seinigen. Der letzte hatte 40 Soldaten weniger als der erste daher bekömt jeder von des letzten Soldaten 5 fl. mehr, als jeder von des ersten seinen. Wie viel Soldaten hatte der erste und andere? und wie viel bekam jeder Soldat?

Auflösung.

Gesetzt, der zweyte hatte x Soldaten, so hatte der erste $x+40$.

Jeder von des zweyten Soldaten bekam $\frac{1200}{x}$

Jeder von des ersten $\frac{1200}{x+40}$

Was jeder von des zweyten seinen bekam, ist um 5 mehr, als was jeder von des ersten bekam;

also $\frac{1200}{x} = \frac{1200}{x+40} + 5$

Bey-

Beyderſeits mit x multiplicirt

$$1200 = \frac{1200x}{x+40} + 5x$$

Beyderſeits mit $x+40$ multiplicirt

$$1200.(x+40) = 1200x + 5x.(x+40)$$

Die Producte wirklich gemacht

$$1200x + 1200.40 = 1200x + 5x^2 + 5x.40.$$

$1200x = 1200x$ abgezogen, und die Producte in Zahlen gemacht.

$$48000 = 5x^2 + 200x$$
$$200x - 200x \text{ abgezogen.}$$
$$48000 - 200x = 5x^2$$

welches man ohne Zweifel auch ſo ſchreiben kan:

$$5x^2 = -200x + 48000.$$

Hier beyderſeits mit 5 dividirt.

$$x^2 = -46x + 9600$$

Alſo iſt in 151; XI.

$$p = -40;\ q = +9600$$

daher $\frac{1}{4}p^2 = +400$; und

$$\frac{1}{4}pp + q = 400 + 9600 = 10000$$

und $x = -20 \pm \sqrt{10000}$

$$= -20 \pm 100$$

alſo das obere Zeichen gebraucht:

$x = 80$ ſo viel hatte der zweyte

und der erſte 120.

Jeder von des zweyten Soldaten bekam $\frac{1200}{80} = 15$

Jeder von des erſten $\frac{1200}{120} = 10.$

Weil die Menge der Soldaten nicht verneint seyn kan, braucht man das obere Zeichen bey der Quadratwurzel, das untere gäbe $x = -120$ und $x+40 = -80$ also eben die vorigen beyden Zahlen nur verneint.

Aus diesem Exempel wird man sehen, wie mit der Gleichung zu verfahren ist, wenn der unbekannten Grösse Quadrat einen andern Coefficienten als 1 hat, wie hier 5 der Coefficient war. Man dividirt nemlich mit diesem Coefficienten alle Glieder der Gleichung. Und so läßt sich jede Gleichung dergestalt einrichten, daß die höchste Potenz der unbekannten Grösse nur 1 zum Coefficienten hat. Dieses ist eine Ergänzung zum 150. §. wo angenommen wird, daß sich jede quadratische Gleichung auf die Form (*C*) bringen lasse.

Die 53. Aufgabe.

§. 154. Zwey Haufen Soldaten haben eine gleiche Summe Gulden unter sich zu theilen, in dem ersten sind 4 Köpf mehr als in dem andern; bey dem Austheilen hat einer von den andern 8 fl. mehr bekommen als einer von den ersten. Die Summe der Gulden ist 172 fl. mehr als Köpfe zusammen sind. Wie viel Leut und wie viel Gulden waren da?

Auflösung.

In dem andern Haufen sind Köpfe gewesen x

so sind in dem ersten	$x+4$
die Summe der Gulden	$2x+176$
Einer von dem andern Haufen bekomt	$\frac{2x+176}{x}$

Einer von dem ersten $\frac{2x+176}{x+4}$

daher

dahero $\frac{2x+176}{x} = \frac{2x+176}{x+4} + 8$

oder $\frac{2x+176}{x} = \frac{2x+176+8x+32}{x+4}$

$x+4$)

$\frac{2x^2+176x+8x+704}{x} = 2x+176+8x+22$

X)

$2x^2+176x+8x+704 = 2x^2+176x+8x^2+32x$

$2x^2+176x+8x \qquad 2x^2+176x+8x$

$704 = 8x^2+24x.$

$8 \quad 8$

$88 = x^2+3x$

$3x = 3x$ abgezogen

$88-3x = x^2$ oder

$x^2 = -3x+88$

wo $p = -3$; $q = +88$ und

$x = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4}+88)}$

aber $\frac{9}{4}+88 = \frac{9+88\cdot 4}{4} = \frac{9+352}{4}$

$= \frac{361}{4}$

Die Wurzel des Zählers ist 19; also $\sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$

und $x = -\frac{3}{2} + \frac{19}{2} = +\frac{16}{2} = 8$ weil nur das

obere Zeichen gebraucht wird.

folglich sind $\cdot : \cdot = 192$.

Die

Die 54. Aufgabe.

§. 155. Aus dem gegebenen Producte zweyer Zahlen und ihrer Summe die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Das Product sey $= a$ — Die eine gesuchte Zahl $= x$
die Summe $= b$ — die andere $= y$
so ist $xy = a$ — $x + y = b$
$y)\ x = a : y$ — $y \quad y$
$x = b - y$

$$y)\ \frac{a : y = b - y}{a = by - y^2}$$

Weil nun y^2 negativ ist; ein Quadrat aber *niemal* negativ sein kann (§. 141.): so muß y^2 addiret: by aber subtrahiret werden.

$$a = by - y^2$$
$$-by + y^2$$
$$y^2 - by + a = o$$
$$a \quad a$$
$$y^2 - by = -a$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2$$
$$y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - a$$

Extr R.

$$\left.\begin{matrix} y - \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b - y \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a}$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a} \\ \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a} \end{cases}$$

$a =$

Digitized by Google

$$a = by - y^2$$
$$y^2 = y^2 \text{ add.}$$
$$y^2 + a = by$$
$$a = a \text{ abgezogen}$$
$$y^2 = by - a$$

Hier ist im 151. §. $x = y$; $p = b$; $q = -a$; und
$y = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)}$

Man findet also zween Wehrte für y;
und weil $x = b - y$ so ist

$x = b - \frac{1}{2}b = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)} = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)}$

Setzt man nemlich $y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)}$
so ist $x = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)}$
Setzt man aber $y = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)}$
so ist $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a)}$

Es ist klar, daß die beyden letzten Wehrte von y und x, nur die vorigen verwechselt sind. Man hat nemlich von x in der Rechnung nichts angenommen, das sich nicht auch von y annehmen liesse; denn wenn man $xy = a$ $x + y = b$ setzt, so liesse sich eben so gut $yx = a$; $y + x = b$ setzen, oder man könnte die Zahl y nennen die man x genennet hatte. Wenn man also zuletzt y durch lauter gegebene Grössen ausdruckt, so muß dieser Ausdruck auch zugleich x bedeuten können.

Die 1. Anmerkung.

§. 156. In der nur erwehnten Erinnerung liegt der Grund, warum die unbekannte Grösse einer Gleichung oft mehr als einen Wehrt hat. Man fragt nemlich oft nicht nach einer einzigen Sache sondern nach vielen zugleich. Die Antwort muß also diese Sachen alle zugleich angeben. Hier fragte man zwar, wie es scheint, nur nach y; man sagte aber von diesem y nichts, was sich nicht auch von x sa-

gen

gen lieſſe, und fragte daher in der That zugleich nach x und y.

Die 2. Anmerkung.

§. 157. Es fließt hieraus die Regel, wo möglich, die Frage so einzurichten, daß man nur einerley fragt, so wird auch die Antwort einfach. Wie eben dieſe Aufgabe 110. §. aufgelöſet ward, ſuchte man beyder Zahlen halbe Differenz. Dieſe konnte betrachtet werden, in ſo fern ſie zur halben Summe addirt oder davon abgezogen wird, daher iſt ſie entweder poſitiv oder negativ; ihre Gröſſe aber beydemal einerley, nur das Zeichen unterſchieden; deßwegen fand man ſie durch eine reine quadratiſche Gleichung (§. 151. III.). Hier aber ſind x und y nicht gleich, und doch findet man y aus keiner andern Betrachtung, als aus der man x finden würde, daher wird die quadratiſche Gleichung unrein, damit y zweene unterſchiedene Wehrte bekommen kann, von dem einer x iſt. Hätte man x geſucht, ſo hätte die Gleichung eben ſo zweene Wehrte gegeben, davon eine y wäre.

Die 55. Aufgabe.

§. 158. Zwo Zahlen zu finden, deren Summen Product und Differenz der Quadrate gleich ſind.

Auflöſung.

Die gröſſere ſey x; die kleinere y: ſo iſt
I) $xy = x + y$, II) $x + y = x^2 - y^2$

Es iſt aber $x^2 - y^2 = (x+y).(x-y)$, wie man ſich aus §. 47. leicht verſichert; alſo verwandelt ſich die Gleichung II in $x + y = (x+y).(x-y)$ und beyderſeits mit $x+y$ dividirt, komt $1 = x - y$,
alſo auf beyden Seiten y addirt $1 + y = x$ und dieſen Wehrt von x in I geſetzt

(1+

Digitized by Google

$(1+y).y = 1+y+y$ oder $y+y^2 = 1+2y$

$y = y$ abgezogen

$y^2 = y+1$

Hier ist in 151, $x=y$, $p=1$, $q=1$; also

$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+1)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$ folglich

$1+y$ oder $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$

Die 1. Anmerkung.

§. 159. Die Probe hiervon zu machen, muß man mit Irrationalgrössen zu rechnen wissen, wie sogleich soll gewiesen werden.

Die 2. Anmerkung.

§. 160. Aus §. 67. ist $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ Weil nun $5 > 4$

so ist $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ oder > 2 und $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{2}{2}$ oder > 1

daher ist $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ verneint.

Es ist aber auch $\sqrt{5} < 3$ weil $\sqrt{9} = 3$; folglich

$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ bejaht.

Wenn man also in den Wehrten von y und x die untern Zeichen braucht, so ist der erste verneint, der andere bejaht: Es bleibt dem ohngeachtet wahr, daß y die kleinere Grösse ist; denn man sieht jede verneinte Grösse für kleiner an, als jede (§ 151. IV.) bejahte.

Wenn solchergestalt $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ verneint,

$x =$

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ bejahet ist, so geben sie ein verneintes Product xy (§. 41.), folglich muß auch ihre Summe $x+y$, die dem Producte gleich seyn soll, verneint seyn, oder zum bejahten x das verneinte y addiren, muß so viel seyn als von dem bejahten x was positives grösseres abziehen. (§. 31.).

Die 56. Aufgabe.

§. 161. Eine Zahl, die mit einer Irrationalzahl multipliciret ist, mit unter das Wurzelzeichen zu bringen.

Auflösung.

Es sey a bey $a\sqrt[n]{b}$ unter das Wurzelzeichen zu bringen. Man setze einstweilen

$$a\sqrt[n]{b} = v$$

zur Dignität n erhoben $\quad a^n b = v^n$

Rad. n extr.) $\quad \sqrt[n]{a^n b} = v$

Hieraus folgt diese Regel: Erhebet die Zahl vor dem Wurzelzeichen zu der Dignität, dergleichen das Wurzelzeichen hat, und multiplicirt diese Dignität mit der Zahl unter dem Wurzelzeichen, so ist geschehen, was man verlangt.

Anmerkung.

§. 162. Diese Regel mit Exempeln zu erläutern, mögen folgende seyn: $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$, $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$, $\frac{1}{2}\sqrt{7}=\sqrt{\frac{7}{4}}$, $2\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{48}$, $x\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{abx^3}$, $\frac{1}{n}\sqrt{ab}=\sqrt{ab:n^2}$, $(a-c):(d+f)\sqrt{g}=\sqrt{(a-c)^2g:(d+f)^2}=\sqrt{(a^2g-2acg+c^2g):(d^2+2df+f^2)}$ u. s. w.

Der 1. Zusatz.

§. 163. Hieraus ist klar, daß, so man die Zahl unter dem Wurzelzeichen mit einer Dignität, dergleichen die Wurzel ist, dividiret, die Wurzel davon vor das Wurzelzeichen gesetzt werden könne, als: $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{27.4}=3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{5.\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\sqrt[n]{xnb}=x\sqrt[n]{b}$, $\sqrt{4\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $2\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{2}{2}\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

Der 2. Zusatz.

§. 164. Wenn nach geschehener dergleichen Reductio einerley Zahlen unter dem Wurzelzeichen bleiben, können die Irrationalzahlen, wie andere Zahlen, addirt, und subtrahirt werden, als: $\sqrt{8}$ und $\sqrt{32}$ geben $2\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2}$, daher $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{320}$ und $\sqrt[3]{135}$ gibt $4\sqrt[3]{5}$ und $3\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{135}=7\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{5}$.

Der 3. Zusatz.

§. 165. Eben so kann die Verhältnis zweyer Irrationalzahlen angegeben werden, wenn hinter dem Wur-

Digitized by Google

zeichen einerley Zahl übrig bleibt, als: $\sqrt{63} : \sqrt{252} = \sqrt{9.7} : \sqrt{36.7} = 3\sqrt{7} : 6\sqrt{7} = 3 : 6 = 1 : 2$.

Die 57. Aufgabe.

§. 166. Irrationalzahlen von einerley Dignität mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

Diese Irrationalzahlen seyen $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$, man setzt ihr Product $= v$

Elev. ad dign.) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = v$

$ab = vn$

Extr. R.) $\sqrt[n]{ab} = v$

Dieses zeiget, daß die Zahlen nur mit einander multipliciret werden dörfen und das Wurzelzeichen davor gesetzt, als: $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{3}.\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{10}\sqrt{15}$. $\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{14}$, $\sqrt[n]{xv}.\sqrt[n]{ys} = \sqrt[n]{xvys}$ ꝛc.

Der 1. Zusatz.

§. 167. Sollten Irrationalzahlen von verschiedener Dignität multipliciret werden, müßten sie vorher zu einerley Benennung oder Dignität gebracht werden, nach §. 67.

Der 2. Zusatz.

§. 168. Weil die Division der Ruckweg von der Multiplication, so können auch Irrationalzahlen nur vor sich

sich dividiret, und das Wurzelzeichen davor gesetzt werden, als: $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$.

§. 169. Nun läßt sich die Probe von den Zahlen §. 158. 160. machen.

$$x = \tfrac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Summe $= 2 + \sqrt{5}$.

Ferner $\tfrac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

multipl.

$+ \tfrac{3}{4}\sqrt{5} + \tfrac{5}{4}$

$\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$

Product $2 + \sqrt{5}$

$$x^2 = \tfrac{9}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4} \text{ (§. 147.)}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4}$$

$$x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$$

Nimmt man aber die zweyte Wehrte

$$x = \tfrac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

So ist

Summe $= 2 - \sqrt{5}$

Ferner

$$\begin{array}{r} \tfrac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \hline -\tfrac{3}{4}\sqrt{5} + \tfrac{5}{4} \\ \tfrac{3}{4} \quad - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \hline \text{Product } 2 - \sqrt{5} \end{array}$$

Endlich

$$x^2 = \tfrac{9}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4}$$

$$x^2 - y^2 = 2 - \sqrt{5}.$$

Die 58. Aufgabe.

§. 170. Man ſucht drey Zahlen, die eine zuſammenhängende Proportion (*prop. geom. continua*) ausmachen, ſo, daß von ihnen die Summe der

Zah-

Zahlen selbst $= a$; und die Summe ihrer Quadrate $= b$; gegeben sind.

Auflösung.

Wenn die erste der drey gesuchten Zahlen x; die zweyte y heißt: so ist die dritte $\frac{y^2}{x}$ und man hätte folgende Gleichungen:

I) $x + y + \frac{y^2}{x} = a$; II) $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b$

Hätte man aber die letzte der drey gesuchten Zahlen z, die mittelste wieder y genannt: so wäre die erste, die jetzo x heißt, $\frac{y^2}{z}$ geworden, und man hätte für y und z eben die Gleichungen, wie für x und y erhalten

Nach der Erinnerung bey 157 wird man also versuchen, ob es angeht, statt x und z, die man zugleich finden müßte, etwas zu suchen, das nicht doppelt ist. So was wird wohl die Summe der beyden äussersten Zahlen seyn. Man nenne sie also u und setze III) $x + \frac{y^2}{x} = u$, wo man nun x aus der Rechnung wegzuschaffen, und u zu gebrauchen sucht.

Wenn man in III) jedes Glied mit x multiplicirt, so erhält man IV) $x^2 + y^2 = ux$; und aus I und

III wird V) $u+y=a$; aus IV aber auf beyden Seiten y^2 abgezogen, $x^2 = ux - y^2$; dieses mit 151. §. verglichen, giebt $p=u$; $q=-y^2$ also

VI) $x=\frac{1}{2}u+\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-y^2)}$ wo in die Augen fällt, daß es für einerley mittlere Zahl y zwey x giebt, nemlich die dazu gehörigen beyden äussern Zahlen.

Weil nun $y=a-u$ aus V; so ist (§. 147.)
$y^2=a^2-2au+u^2$, und $\frac{1}{4}u^2-y^2$
$=\frac{1}{4}u^2-a^2+2au-u^2$ (§. 45.).
$=2au-\frac{3}{4}u^2-a^2$, daher wird aus VI der Wehrt von $x=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(2au-\frac{3}{4}u^2-a^2)}$ statt dessen ich der Kürze wegen $x=\frac{1}{2}u\pm p$ schreiben will, wo p die Irrationalgrösse bedeutet, daß $p^2=2au-\frac{3}{4}u^2-a^2$, welches einerley bleibt, man mag p mit $+$ oder mit $-$ zu $\frac{1}{2}u$ gesetzt haben (§. 41.).

Folglich ist $ux=\frac{1}{2}u^2\pm up$, welches, vermöge IV, der Wehrt von x^2+y^2 ist.

Aus III ist $\frac{y^2}{x}=u-x$, folglich den nur gefundenen Wehrt von x gebraucht,

$=u-(\frac{1}{2}u\pm p)=u-\frac{1}{2}u\mp p=\frac{1}{2}u\mp p$; das Quadrat hiervon ist $\frac{y^4}{x^2}$.

Dieses Quadrat also, und der Wehrt von x^2+y^2 geben zusammen b, vermöge (III) also ist

$\frac{1}{2}u^2\pm up+(\frac{1}{2}u\mp p)^2=b$, oder das Quadrat wirklich gemacht.

$\frac{1}{2}u^2$

$\frac{1}{2}u^2 \pm up + \frac{1}{4}u^2 \mp up + p^2 = b$; hier zusammen gerechnet, was einerley ist, und weggelassen, was sich aufhebt, kömt

$\frac{3}{4}u^2 + p^2 = b$; weil aber in p noch u enthalten ist, setze man statt p^2 seinen Wehrt, so kömt

$$\frac{3}{4}u^2 + 2au - \frac{3}{4}u^2 - a^2 = b \text{ oder}$$
$$2au - a^2 = b$$
$$a^2 = a^2 \text{ add.}$$
$$2au = b + a^2$$

mit $2a$ dividirt

$$\text{VII)}\quad u = \frac{b+a^2}{2a} = \frac{b}{2a} + \frac{a}{2} \text{ (§. 59.).}$$

also aus (V) $a - u$ oder $y = a - \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}a$ (VIII)

$$= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$$
$$= \frac{a^2 - b}{2a}$$

folglich $\frac{1}{2}u = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4}$

davon das Quadrat oder

$$\frac{1}{4}u^2 = \frac{b^2}{16a^2} + \frac{b}{8} + \frac{1}{16}a^2$$

Ferner $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4a^2}$. Man ſoll dieſes in dem Wehrte von x (VI.) von $\frac{1}{4}x^2$ abziehen, man drücke alſo die Theile von y^2 ſo aus, daß ſie mit den Theilen von $\frac{1}{4}u^2$, wo eben die Potenzen von a und b vorkommen, einerley Nenner haben: ſo wird

$$y^2 = \frac{4}{16}a^2 - \frac{4b}{8} + \frac{4b^2}{16a^2}$$

$$\text{aber } \tfrac{1}{4}u^2 = \frac{b^2}{16}a^2 + \frac{b}{8} + \frac{1}{16}a^2$$

$$\tfrac{1}{4}u^2 - y^2 = -\frac{3a^2}{16} + \frac{5b}{8} - \frac{3b^2}{16a^2} \text{ (§. 45.)}$$

Dieſe Gröſſe, die nun gegeben iſt, heiſſe man c^2, alſo die Wurzel daraus c: ſo iſt aus VI.)

$$\text{IX.) } x = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4} \pm c$$

wo der eine Wehrt die erſte der drey geſuchten Zahlen der andere die letzte giebt.

Weil die drey Zahlen nemlich nach einander wachſen oder abnehmen müſſen, ſo giebt in IX. das obere Zeichen die erſte Zahl, wenn ſie abnehmen; das untere aber giebt die erſte Zahl, wenn ſie wachſen, da man die Progreſſion, von welchem Ende man will, anfangen kann, ſo kan jede der beyden äuſſerſten Zahlen die erſte heiſſen.

In den beyden Wehrten VIII, IX. ist also die Auflösung der Gleichung enthalten.

Exempel.

§. 171. Die drey Zahlen sollen zusammen $a = 21$ und ihre Quadrate zusammen $b = 189$ ausmachen. Weil in den Wehrten der gesuchten Grössen $\frac{b}{a}$ häufig vorkömt, so berechnet man dieses zuerst und findet es $= \frac{189}{21} = 9$; daher $\frac{b}{2a} = \frac{9}{2}$ und $\frac{b}{4a} = \frac{9}{4}$;

Nun muß man zuerst c^2 berechnen, es ist also

$$-\frac{3a^2}{16} = -\frac{3.441}{16} = -\frac{1323}{16}$$

$$-\frac{3b^2}{16a^2} = -\frac{3.81}{16} = -\frac{243}{16}$$

Dieses zusammen $= -\frac{1566}{16}$

$$+\frac{5.b}{8} = +\frac{5.189}{8} = +\frac{1890}{16}$$

$$c^2 = \frac{324}{16}$$

daher $\sqrt{\frac{324}{16}}$ oder $c = \frac{\sqrt{324}}{4} = \frac{18}{4}$

Folglich aus VIII;

$$y = \frac{21}{2} - \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x = \frac{9}{4} + \frac{21}{4} \pm \frac{18}{4} = \frac{30 \pm 18}{4}$$

das obere Zeichen giebt $\frac{48}{4} = 12$

das untere $\frac{12}{4} = 3$

Die drey Zahlen sind also

3, 6, 12, wo $3+6+12=21$; und
$9+36+144=189$

Wenn man a, b nach Gefallen annähme, würde man für c oft einen irrationalen Wehrt finden, wodurch die äusserſten Zahlen irrational würden. Durch Verſuche a, b ſo anzunehmen, daß c rational wird, dürfte ſchwer fallen, und Regeln, nach denen man dieſes erhalten könnte, laſſen ſich aus der hier vorgetragenen Lehre nicht herleiten. Die Aufgabe wird alſo hier nicht wohl anders können gebraucht werden, als daß man die drey Zahlen Anfangs annimmt, aus ihnen a und b berechnet und daraus rückwärts die Zahlen ſucht.

Anmerkung.

§. 172. Man kann auf eine ähnliche Art vier Zahlen ſuchen, die eine zuſammenhängende Proportion ausmachen, und wo die Summen der Zahlen ſelbſt und der Quadrate

drate gegeben sind. Diß ist in Newtons Arithmetica universali die funfzehende arithmetische Aufgabe.

Die 59. Aufgabe.

§. 173. Den Unterschied zweyer Quadraten zu finden, deren Wurzeln um eins unterschieden sind.

Auflösung.

Die eine Wurzel sey $= n$
so ist die andere $= n + 1$
das Quadrat der andern $= n^2 + 2n + 1$ (147).
der ersten $= n^2$
der Unterscheid $= 2n + 1$ oder n und $n + 1$

also ist der Unterscheid zweyer Quadraten, deren Wurzeln um 1 unterschieden, die Summe der Wurzeln gleich.

Der 1. Zusatz.

§. 174. Hat man also von einer Zahl das Quadrat, und will das Quadrat von einer Zahl, die um 1 grösser ist, haben, so addire man zu dem Quadrat nur beyde Wurzeln, so hat man das Verlangte.

Der 2. Zusatz.

§. 175. Ist $n=1$, so ist $2n+1=3$, ist $n=2$, so ist $2n+1=5$, ist $n=3$, so ist $2n+1=7$, ist $n=4$, so ist $2n+1=9$ ꝛc. woraus offenbar, wenn man die Quadrate von 1 an haben will, man nur die in natürlicher Ordnung auf einander folgende ungraden Zahlen zu einander addiren dörfe.

Die

Die 60. Aufgabe.

§. 176. Die Eigenſchaften der Cubiczahl zu finden, wenn die Wurzel zwey Theile hat.

Auflöſung.

Die zwey Theile ſeyen $= a + b$, ſo iſt ihr Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$. (§. 147.).

$$\begin{array}{r} a + b \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Hieraus iſt klar: wenn die Wurzel zwey Theile hat, ſo hat die Cubiczahl vier Theile; 1) die Cubiczahl des erſten Theils, 2) das dreyfache Product des Quadrats des erſten Theils in den anderen, 3) das dreyfache Product aus dem erſten Theil in das Quadrat des anderen, und 4) aus der Cubiczahl des zweyten Theils. Oder kurz aus den Cubiczahlen eines jeden Theils und aus dem dreyfachen Product eines jeden Theils und aus Quadrat des andern.

Der 1. Zuſatz.

§. 177. Hätte die Wurzel drey Theile, als $a + c + d$, ſo würde an ſtatt b ſtehen $c + d$, dahero müßte die Cubiczahl von $a + c + d$ beſtehen 1) aus der Cubiczahl von $a = a^3$, 2) aus dem dreyfachen Product von a^2 in $c + d = 3a^2c + 3a^2d$, 3) aus dem dreyfachen Product von dem Quadrat $c + d = c^2 + 2cd + d^2$ in $a = 3ac^2 + 6acd + 3ad^2$, 4) aus der Cubiczahl von $c + d = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$. Woraus erhellet, daß die Cubiczahl einer dreytheiligen Wurzel beſtehe aus

aus den Cubiczahlen jeden Theils, dreyfachen Products eines jeden Theils in das Quadrat eines jeden andern Theils, und über das aus dem sechsfachen Product aller drey Theile.

Der 2. Zusatz.

§. 178. Auf eine gleiche Art findet man, daß, wenn die Wurzel vier- und mehrtheilig ist, die Cubiczahl bestehe 1) aus den Cubiczahlen eines jeden Theils, 2) aus dem dreyfachen Product eines jeden Theils in das Quadrat jeden andern Theils, 3) aus dem sechsfachen Product eines jeden Theils in jede zwey von den übrigen.

Die 61. Aufgabe.

§. 179. Den Unterschied zweyer Cubiczahlen zu finden, deren Wurzeln um eines unterschieden sind.

Auflösung.

Die Wurzeln seyen n und $n+1$
so ist die grössere Cubiczahl $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
(176.) die kleinere $= n^3$

Unterschied $= 3n^2 + 3n + 1$

das ist, $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ und $2n^2 + n$
Es bestehet demnach der Unterschied 1) in der Quadratzahl von der grössern Wurzel, 2) doppelten Quadratzahl der kleinern, 3) der kleinen selbst.

Zusatz.

§. 180. Wenn man also die Quadratzahlen schon gemacht hat (§. 175.), so kann man auch durch blosses addiren die Cubiczahlen finden, wenn zu jeder vorhergehenden

gehenden das, was §. 179. gemeldet worden, addirt wird. Man kann aber auch, ohne die Quadrate zu haben, die Cubiczahlen blos durch addiren finden. Die Methode steht unter andern in Kästners Analysis endlicher Grössen, 48. §. Ludolfs Tetragonometria tabularia, Jena, 1712. 4to. enthält die Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000; Buchners Tabula Radicum, quadratorum & cuborum, Nürnb. 1705. in lang 8vo, die Quadrate und Cubiczahlen aller ganzen Zahlen von 1 bis 12000; die Buchnerischen Tafeln aber sind voller Fehler, ohne deren Verbesserung man sie nicht sicher brauchen kann.

Die 62. Aufgabe.

§. 181. **Eine Regel zu finden, nach welcher eine jede zweytheilige Wurzel leicht zu einer jeden Dignität erhoben werden kann.**

Auflösung.

Man erhebe durch gewöhnliches Multipliciren die Wurzel $a+b$ zu etlichen Dignitäten, so wird sich die Regel selbsten geben, wenn man betrachtet, woraus die die Theile der Dignität bestehen.

$a+b$
$a^2+2ab+b^2$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Man ersiehet hieraus, 1) die Glieder bestehen aus Producten von a und b oder ihren Dignitäten. 2) Diese Producten haben Zahlen bey sich, die man Unzen nennet.

net. 3) Daß die Dignität des ersten Theils a in jedem Glied um 1 weniger; hingegen aber die von b immer um eines mehr sey. Dahero diese Producte leicht zu finden, wenn folgende zwey Reihen unter einander geschrieben, und jedes untere Glied in das überstehende multipliciret wird, z. E. für die fünfte Dignität.

a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
1	b	b^2	b^3	b^4	b^5
a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

4) Die Unzen entstehen aus zwey arithmetischen Progressionen der natürlichen Zahlen, nemlich eine abnehmende und zunehmende, die so viel Glieder hat, als der Exponent der Dignität Einheiten. Z. E. für die fünfte Dignität.

5	4	3	2	1
1	2	3	4	5

Die aber durch die Division gefunden werden, nemlich

für das zweyte Glied $\frac{5}{1} = 5$ für das dritte $\frac{5 \cdot 4}{1.2} = \frac{20}{2} = 10$

für das vierte $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1.2.3} = \frac{60}{6} = 10$ für

das fünfte $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = \frac{120}{24} = 5$ für das

letzte $\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = \frac{120}{120} = 1$, werden dann

diese gefundene Unzen zu vorhin gefundenen Producten gesetzt: so hat man die verlangte Dignität.

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^2 + 5ab^4 + b^5$$

Und also findet man alle übrige Dignitaten.

An-

Anmerkung.

§. 182. Wir enthalten uns, die allgemeine Regel des unvergleichlichen Neutons hieraus herzuleiten, aus Beysorge, es mögte denen Anfängern zubeschwerlich und verdrüßlich seyn, zumalen der Nutze davon nicht sogleich gezeiget werden kann. Wir versparen dahero gedachte allgemeine Regel dahin, wo wir sie nöthig haben werden.

Die 63. Aufgabe.

§. 183. Die Eigenschaften der arithmetischen Progression zu untersuchen.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$, die Differenz $= d$, so sind die Glieder

1) in der wachsenden Progession

I	II	III	IV	V	VI
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$

2) in der abnehmenden

I	II	III	IV	V	VI
a	$a-d$	$a-2d$	$a-3d$	$a-4d$	$a-5d$

Diese Buchstaben zeigen deutlich, daß die Differenz in jedem Glied um einmal weniger sey, als die Zahl, welche anzeiget, das wie vielteste Glied es sey, als im fünften ist $4d$ u. s. w. doch mit dem Unterschied, daß diese Differenz in der wachsenden Progression zum ersten Glied addirt, in der abnehmenden aber subtrahirt werden müsse.

Der 1. Zusatz.

§. 148. Wenn demnach die Zahl der Glieder gegeben ist nebst der Differenz, so findet man das letzte Glied, wenn man von der Zahl der Glieder 1 abziehet, die Differenz mit diesem Rest multipliciret, und zu dem ersten

ersten Glied addiret, wenn die Progression wachsend, subtrahiret aber, wenn sie abnehmend ist. Es sey das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, die Zahl der Glieder $= n$, das letzte Glied $= y$, so ist $(n - 1)\,d) + a = y$ bey der abnehmenden Progression aber $a - (n - 1)\,d = y$, oder bey der wachsenden $a + nd - d = y$, bey der abnehmenden $a - nd + d = y$.

Der 2. Zusatz.

§. 185. In der Aequation $a + nd - d = y$ sind vier Grössen, deren jede unbekannt seyn kann, und die übrigen bekannt; daher noch 3 Aufgaben daraus gemacht werden können, als:

$$a = y - nd + d$$

$$n = \frac{y - a}{a} + 1$$

$$d = \frac{y - a}{n - 1}$$

Die 64. Aufgabe.

§. 186. Die Summe des ersten und letzten Gliedes in einer arithmetischen Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey alles, wie §. 183, so ist

a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$	
			$a+2d$	$a+d$	a	
			$2a+5d$	$2a+5d$	$2a+5d$	
n	$a-d$	$a-2d$	$a-3d$	$a-4d$	$a-5d$	
			$a-2d$	$a-d$	a	
			$2a-5d$	$2a-5d$	$2a-5d$	

Es ist also die Summe des ersten und letzten Gliedes in einer arithmetischen Progression gleich der Summe jeder zwey Glieder, die von den beyden äussersten gleich weit abstehen.

Der 1. Zusatz.

§. 187. Wenn demnach die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Zahl der Glieder multiplicirt wird, so hat man die Summe aller Glieder, diese Summe sey $= x$, so ist (§. 184.) $(a + a + (n-1)d)\frac{n}{2} = x = an + \frac{n^2 d}{2} - \frac{nd}{2} = x$. Wie diese Aequation müsse mit Worten ausgedruckt und eine Regel daraus gemacht werden, werden diejenige leicht fassen, die das bisher gesagte verstanden.

Der 2. Zusatz.

§. 188. Es sind in dieser Aequation wiederum vier Grössen, deren jede, wenn die übrigen drey bekannt sind, gefunden werden kann.

$$a = \frac{x}{n} - \frac{nd}{2} + \frac{d}{2}$$

$$d = \frac{2x - 2an}{n^2 - n} = \frac{2(x - an)}{n(n-1)}$$

$$n = \sqrt{\frac{2x}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}} - \frac{a}{d} + \frac{1}{2} \text{ (§. 151.).}$$

$$n = \sqrt{\frac{2x}{d} + \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{2}$$

Der

Der 3. Zusatz.

§. 189. Nennet man das letzte Glied b, wenn es bekannt ist, so ist $x = (a+b)^{\frac{n}{2}}$ dahero

$$a = \frac{2x}{n} - b$$

$$b = \frac{2x}{n} - a$$

$$n = \frac{2x}{a+b}$$

Die 65. Aufgabe.

§. 190. Die Eigenschaften einer geometrischen Progression zu untersuchen.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$, der Exponent $= m$, so ist

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
a	am	am^2	am^3	am^4	am^5	am^6	am^7

I	II	III	IV	V	VI
	a	a	a	a	a
a	—	—	—	—	—
	m	m^2	m^3	m^4	m^5

woraus klar, daß in jedem Glied die Dignität des Exponenten mit dem ersten Glied bey der wachsenden Progression multiplicirt, bey der abnehmenden aber dividirt sey, deren Exponent 1 weniger als die Zahl des Gliedes.

Zusatz.

§. 191. Wäre demnach die Zahl der Glieder $= n$, so wäre das letzte Glied am^{n-1} oder $\frac{a}{m^{n-1}}$

Die 66. Aufgabe.

§. 192. Das Product zu finden aus der Summe einer geometrischen Progression in den um 1 verringerten Exponenten.

Auflösung.

Es seye alles, wie §. 190, so ist

$$a + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5$$

$$m - 1$$

$$-a - am - am^2 - am^3 - am^4 - am^5$$
$$+am + am^2 + am^3 - am^4 - am^5 - am^6$$

$$am^6 - a$$

Das Product aus der Summe einer geometrischen Progression in den um 1 verringerten Exponenten ist gleich der Differenz des ersten Glieds und eines Glieds weiter als das letzte.

Zusatz.

§. 193. Wenn also die Differenz des ersten und eines über das letzte weiteren Gliedes mit dem um 1 verringerten Exponenten dividirt wird, so bekomt man die Summe der geometrischen Progression, man nenne die Summe x, so ist $\frac{am^n - a}{m - 1} = x$

Die

Die 67. Aufgabe.

§. 194. Die Wahrheit von §. 193. durch die Division zu finden, oder zu finden, was heraus komme, wenn die Differenz des ersten und letzten Gliedes mit dem um 1 verringerten Exponenten dividirt wird.

Auflösung.

Es seye alles, wie vorhin, so ist (§. 59.).

$m-1) \; am^{n-1} - a \; (am^{n-2} + am^{n-3} + am^{n-4} \; am^{n-5})$

$am^{n-1} - am^{n-2}$

$+ am^{n-2} - a$

$+ am^{n-2} - am^{n-3}$

$+ am^{n-3} - a$

$+ am^{n-3} - am^{n-4}$

$+ am^{n-4} - a$

$+ am^{n-4} - am^{n-5}$

$+ am^{n-5} - a$ ꝛc.

Wäre $n = 5$ gewesen, so würde $am^{n-5} = am^{0} = a$ (§. 60.) folglich da $am^{n-4} - am^{n-5} = am^{n-4} - a$ von $am^{n-4} - a$ abgezogen wurde, mußte es aufgehen, und so in jedem Fall, wenn eine so grosse Zahl von der Dignität des Exponenten abgezogen werden solle (§. 59.) als die Zahl der Glieder ist. Man siehet also hieraus, daß durch diese Division alle Glieder heraus kommen, ausser das letzte, und würde man die Differenz von dem ersten und einem weiteren als das letzte Glied genommen haben, so hätte man alle Glieder, das ist, die Summe der ganzen Progression bekommen.

Anmerkung.

§. 195. Es sind zwar die 66- und 67ste Aufgaben nur auf die wachsenden Progressionen angewendet worden; wer aber auch bey der abnehmenden eben dieses vornehmen will, wird eben diese Eigenschaften finden. Allein da in diesem Fall der Exponent ein Bruch, und wenn man das erste als gröſſere Glied von dem letzten als kleineren abziehet, gibt es eben sowohl eine negative Gröſſe, als wenn man 1 von dem Exponenten, der ein Bruch ist, abziehet, wodurch die Rechnung etwas beschwerlich wird; dahero ist es am besten, man sehe bey der abnehmenden Progression das letzte Glied als das erste an, wodurch allen Schwierigkeiten vorgebogen wird. Man drücke nemlich die Summe im 193. §. so aus: $\frac{a - am^n}{1 - m} = x$. Auf diese Art ist der Dividendus hier bejaht, wenn der Dividendus im 193 verneint, oder wenn das dortige letzte Glied gröſſer als das erste ist. Eben so wird hier der Divisor bejaht, wenn der dortige verneint, oder wenn der Exponent m kleiner als 1 ist. Weil aber zwo bejahte Gröſſen eben den Quotienten geben, wie die ihnen entgegen gesetzten beyden verneinten (§. 42.), so kömt einerley x heraus, man mag es auf die jetzige Art, oder wie im 193. §. ausdrücken.

Man kann eben dieses auch so ausdrücken: $\frac{a.(1 - m^n)}{1 - m} = x$; denn wenn zwey Producte, wie $a.\ 1 - m$ und $a.\ m^n$ einen gemeinschaftlichen Factor a haben, so kann

kann man dieſen in das multipliciren, was die beyden übrigen unterſchiedenen Factorn zuſammen geben.

Die 68. Aufgabe.

§. 196. Eine Reihe von Brüchen zu ſummiren die ſich mit $\frac{1}{2}$ anfängt, und da der folgende Bruch immer des nächſtvorhergehenden Hälfte iſt, daß alſo die Reihe ſo ausſieht: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, u. ſ. w.

Auflöſung.

Man ſetze im 195. §. in dem zweyten Ausdrucke der Summe $a = \frac{1}{2}$; $m = \frac{1}{2}$; und verlange die Summe von n Gliedern der Reihe: ſo iſt ſolche

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}.\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 - \tfrac{1}{2^n} \text{ (§. 67.)}$$

oder n Glieder der Progreſſion, geben eine Summe, der zur 1 das $n$te Glied fehlt. Die Progreſſion ſey $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$. Hier ſind 8 Glieder, das achte iſt $\frac{1}{2^8}$. Addirt man dieſe Glieder nach der gewöhnlichen Bruchrechnung, ſo daß man ſie alle auf 256 Theile bringt, ſo muß man jedes Bruches Zähler mit der Zahl multipliciren, mit der ſein Nenner muß multipliciret werden, um ſich in 256 zu verwandeln. Alſo beträgt dergleichen 256 Theile

Digitized by Google

$\frac{1}{2^{256}}$	1
$\frac{1}{2^{128}}$	2
$\frac{1}{64}$	4
$\frac{1}{32}$	8
$\frac{1}{16}$	16
$\frac{1}{8}$	32
$\frac{1}{4}$	64
$\frac{1}{2}$	128
	255

oder die Brüche zusammen machen $\frac{255}{256} = 1 - \frac{1}{256}$

Je gröſſer nun n wird, desto kleiner wird $\frac{1}{2^n}$, und man kann allemal n so gros nehmen, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner wird, als jeder kleiner Bruch, so gering man auch solchen nähme. Wollte man z. E. haben, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner als ein Milliontheil werden sollte, so müßte man n so gros nehmen, daß 2^n gröſſer als eine Million würde, und dieses geht an, weil die Potenzen der 2 immer fort ohne Gränzen wachsen.

Da also $\frac{1}{2^n}$ so klein, als man nur will, werden kann, so kann sich die wirkliche Summe dieser Reihe, nemlich $1 - \frac{1}{2^n}$, der Einheit, so weit man will, nähern, das ist, man kann die Reihe allemal so weit fortsetzen, daß ihre Summe zwar nicht völlig 1 ist, aber doch der 1 so nahe kömt, als man nur will.

In dieser Bedeutung sagt man: die Summe der unendlich fortgesetzten Reihe sey $= 1$, oder, wenn man sich alle mögliche Glieder dieser Reihe vorstellt, so betragen sie zusammen 1. Denn wer sagte, diese Summe sey 1 weniger etwas, der würde dieses Etwas nicht angeben können, weil sich die Reihe allemal so weit fortsetzen läßt, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner als dieses Etwas wird. Sagte jemand, die Summe dieser ohne Ende fortgesetzten

Reihe

Reihe sey von der 1 immer noch um etwas unterschieden, das wenigstens ein Millionentheilgen betrage, so müßte er uns verwehren, die Reihe so weit fortzusetzen bis $\frac{1}{2}^n$ kleiner als ein Millionentheilgen würde. Da er aber dieses nicht verwehren kann, so muß er auch zugestehen, daß die Summe der Reihe der 1 näher komme, als er behaupten wollte. Und so mag jemand einen so geringen Unterschied zwischen 1 und die Summe der Reihe annehmen als er will, so kann man ihm zeigen, daß dieser Unterschied noch vermindert werden kann, wenn nur die Reihe weit genug fortgesetzt wird.

Wenn man also die Reihe, so weit als nur möglich ist, fortsetzen darf, so läßt sich für ihre Summe nichts anders angeben als 1; und so wird deutlich seyn, daß die Summe dieser unendlichen Reihe Brüche 1 heissen muß.

Der wirklichen Summe, von den Gliedern nemlich, die man in der That nach einander hinsetzen kann, fehlt allemal zur 1 das letzte dieser Glieder. Aber dieses kann so klein, als man nur will, werden, welches man auch so ausdrückt: es könne verschwinden. Man trägt also die bisherigen Schlüsse abgekürzt auch so vor: das letzte Glied wird in Vergleichung mit der 1 als nichts angesehen, und daher ist die Summe = 1.

Wäre die Meynung dieses Ausdruckes: das letzte Glied der unendlichen Reihe sey in der That = 0; so würde man ihn schwerlich rechtfertigen können. Denn erstlich gibt es kein letztes Glied dieser unendlichen Reihe, man kann niemals aufhören zu halbiren, jeder Bruch, so klein er auch ist, hat wieder eine Hälfte; zweytens kann kein Glied dieser Reihe, so weit man sie auch fortsetzt, = 0 werden. Denn käme man durch halbiren auf 0, so wäre Nichts die Hälfte von Etwas, oder das

nächste Glied vor dem Nichts wäre 2mal Nichts, und das zweyte davon rückwärts viermal Nichts, und so wären alle vorhergehende Gliedet nur achtfache, sechszehenfache, ꝛc. des Nichts.

Solche Ungereimtheiten zu vermeiden, muß man sich die Sache auf die angezeigte Art deutlich vorstellen, und wenn man von einem letzten Gliede, das als nichts angesehen wird, redet, solche Ausdrückungen nur als Abkürzungen der vorigen Schlüsse ansehen. Diese Erinnerung ist deswegen wichtig, weil gegenwärtige Aufgabe schon als etwas, das zur Rechnung des unendlichen gehöret, kann betrachtet werden, und gehörige Begriffe von ihr bey dieser Rechnung Dienste leisten können.

Die 69. Aufgabe.

§. 197. Eine unendliche geometrische Reihe zu summiren, wo der Exponent ein Bruch ist.

Auflösung.

Das erste Glied sey $\frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, und das Glied also eine ganze Zahl ist, wenn $b = 1$; Eben so sollen c, d ganze Zahlen bedeuten, und der Exponent $\frac{c}{d}$ seyn. So ist die Progression

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\cdot\frac{c^2}{d^2} + \frac{a}{b}\cdot\frac{c^3}{d^3}\cdot \text{ u. s. w.}$$

Jedes Glied enthält nemlich $\frac{a}{b}$ in einer Potenz von $\frac{c}{d}$ multipli-

tipliciert, deren Exponent um 1 weniger ist, als die Zahl des Gliedes; das $n+1$te Glied also ist $\frac{a}{b}.\frac{c^n}{d^n}$ z. E. das 101 Glied wäre $\frac{a}{b}.\frac{c^{100}}{d^{100}}$. Eben so ist das $n$te Glied $\frac{a}{b}.\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}}$. Wenn man nun die Summe von n Gliedern finden wolte, so würde man nach dem 193. §. folgendergestalt verfahren: Das $n$te Glied wäre, was im 193. §. das letzte heißt, und das $n+2$te ist, was dorten eins weiter als das letzte heißt. Also hiesse

Das erste Glied im 193. §. a, hier $\frac{a}{b}$

Der Exponent im 193. §. m, hier $\frac{c}{d}$

n wäre dorten und hier einerley.

Wenn man nun die dort gefundene Summe nach dem Ausdrucke braucht, der beym 195 §. zuletzt gegeben worden, so wird sie in den gegenwärtigen Buchstaben

$$\frac{\frac{a}{b}.\left(1-\left(\frac{c}{d}\right)^n\right)}{1-\frac{c}{d}}$$

Die

Dieſes gibt die Summe für n Glieder.

Z. E. ſey $a=1$, $b=10$, $c=1$, $d=10$, $n=5$, oder man ſuche die Summe folgender fünf Brüche $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}$: ſo findet ſie ſich

$$\frac{\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{100000}\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{99999}{100000}}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{9}\cdot\frac{99999}{100000}$$

$$= \frac{11111}{100000}.$$

Wenn man nun die Reihe, ſo weit man will, ohne Ende fortſetzen kann, ſo wird $\left(\frac{c}{d}\right)^n$ immer kleiner und kleiner, je gröſſer n wird, und kann ſo klein werden, als man will, wenn man nur n gros genug nimmt. Alſo läßt ſich wiederum die Reihe allemal ſo weit fortſetzen, daß $1-\left(\frac{c}{d}\right)^n$ ſo wenig, als man will, von der 1 unterſchieden iſt, und man kann alſo in der Bedeutung, die beym vorigen §. weitläuftig iſt erklärt worden, auch hier ſagen, die Reihe, ſo weit als möglich, fortgeſetzt, oder die unendliche Reihe habe zur Summe $\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{c}{d}}$.

Dieſer Ausdruck verwandelt ſich nach den gewöhnlichen Ausdrückungen von Brüchen zu ändern, in folgende: man multiplicire, was oben und unten ſteht mit d, ſo wird

wird er $\frac{\frac{a}{b} \cdot d}{d-c}$; und nun multiplicire man, was oben und unten ſteht, mit b, ſo wird

er $\frac{ad}{b.(d-c)} = \frac{ad}{bd-bc}$

Der 1. Zuſatz.

§. 198. Wenn $a = c$, $b = d$, alſo die Reihe $\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}$, u. ſ. w. ſo iſt dieſer unendlichen Reihe

Summe $\frac{a.b}{b.(b-a)} = \frac{a}{b-a}$

Iſt alſo noch überdiß $a = 1$; ſo iſt die Summe $\frac{1}{b-1}$.

Dieſer letzte Ausdruck enthält alſo, nachdem man ſtatt b eine andere und andere ganze Zahl ſetzt, die Summen unzählicher ſolcher unendlichen Reihen.

Es ſey

$b = 2$ ſo iſt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots = 1$
$= 3$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots = \frac{1}{2}$
$= 4$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots = \frac{1}{3}$
$= 5$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \ldots = \frac{1}{4}$

woraus man die Beſchaffenheit dieſer Summen leicht ein-

Digitized by Google

einsehen wird. Die Puncte bedeuten, daß man nach den angegebenen ersten drey Gliedern jeder Reihe sich noch unzählig viel vorstellen müsse, oder daß man sich die Reihe unendlich vorstellen müsse.

Wäre $a=2$, $b=5$, $c=3$, $d=4$; also die Reihe

$$\frac{2}{5}+\frac{2.3}{5.4}+\frac{2.9}{5.16}+\frac{2.27}{5.64}\ -\ -\ -$$

so fände sich aus dem allgemeinen Ausdrucke am Ende des 197. §. ihre Summe $\frac{2\,4}{5.(4-3)}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$. Je mehr man Glieder dieser Reihe wirklich berechnete und zusammen addirte, desto näher würde man dieser Summe kommen.

Ist $a=3$, $b=1$, $c=2$, $d=7$; so entsteht die Reihe $3+\frac{3.2}{7}+\frac{3.4}{49}=\frac{3.8}{343}$.... deren Summe auf die nur angezeigte Art $\frac{3.7}{1.(7-2}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$

Und so kann man dergleichen Reihen, so viel man will, erdenken, und auf diese Art summiren.

Der 2. Zusatz.

§. 199. Wäre $d=c$; so hätte man folgende Reihe zu summiren:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}$$

Das

Das heißt einerley Gröſſe, es möchte nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, zu wiederholtenmalen zu sich selbst zu addiren. Die Summe einer gewissen Menge solcher gleichen Gröſſen ist ohne Zweifel so viel, als eine dieser Gröſſen so vielmal genommen, so viel ihrer sind; z. E. die Summe von 10, dergleichen ist $= 10.\frac{a}{b}$.

Stellt man sich also diese Reihe unendlich vor, das ist: stellt man sich $\frac{a}{b}$ unzählich vielmal vor, so ist klar, daß die nur erwehnte Summe gröſſer werden muß, als jede Gröſſe, die man angeben kan; so klein man auch $\frac{a}{b}$ setzt, wenn man es nur von einer Gröſſe annimmt, die sich angeben läßt. Denn wäre z. E. $\frac{a}{b} = \frac{1}{1000000}$, und man stellt sich diesen so kleinen Bruch eine Million mal nach einander vor, so würde die Summe einer solchen Reihe doch eine Billion, und also sehr gros seyn.

Wenn man sich also diese Reihe lauter gleicher Gröſſen, so weit man will, fortgesetzt, vorstellen darf, so kann allemal ihre Summe jede Gröſſe, so gros als man auch solche Gröſſe annimmt übersteigen, im nur gebrauchten Exempel kann sie gröſſer als eine Billion, oder jede andere Zahl, so gros man auch eine solche Zahl annimmt, seyn.

Dieses druckt man so aus: Die Summe unzählich vieler gleicher Gröſſen, oder das Vielfache einer gegebenen Gröſſe durch eine unendlich grosse Zahl sey unendlich.

Für

Für $d = c$ wird der Ausdruck der Summe am Ende des 197. §. $\frac{ad}{b.0}$. Ein solcher Quotient, dessen Dividendus eine gegebene Grösse hat, der Divisor $= 0$ bedeutet allemal eine unendliche Grösse. Dieses gründet sich darauf: je kleiner der Divisor in Vergleichung mit dem Dividendus ist, desto öfter ist jener in diesem enthalten, desto grösser ist der Quotient. Wenn man sich also vorstellt, der Divisor nehme bis auf Nichts ab, der Dividendus aber behalte eine endliche Grösse, oder eine solche Grösse, die sich angeben läßt, so wächst der Quotient immer mehr und mehr, und übersteigt alle Grössen, die sich angeben lassen, das heißt: er wird unendlich. Man kann wohl eigentlich nicht Etwas mit Nichts dividiren; aber man kan sich vorstellen, daß der der Divisor, bis er Nichts geworden ist, immer kleiner und kleiner geworden ist, und also einen immer grössern und grössern Quotienten gegeben hat, wodurch der Quotient alle Gränzen endlicher Grössen überstiegen hat.

Der 3. Zusatz.

§. 200. Wollte man in dem Ausdrucke am Ende des 197. §. c grösser als d setzen, so gäbe dieser Ausdruck etwas verneintes, und das wäre offenbar ungereimt, denn man nimmt die Glieder der Reihe alle positiv an, und daher können sie, so viel oder so wenig ihrer sind, nie eine verneinte Summe geben. Der Fehler dieses Verfahrens besteht in folgendem: Der Ausdruck am Ende des 197. §. ist aus der Voraussetzung gefunden worden, daß $\frac{c}{d}$ auf eine höhere Potenz immer was kleineres gebe,

oder

oder ein eigentlicher Bruch sey, daß die folgenden Glieder der Reihe immer kleiner und kleiner und so klein als man will werden. Ist aber c gröſſer als d, so ist diese Voraussetzung falsch und $1 - (\frac{c}{d})^n$ ist eine verneinte Gröſſe, die immer gröſſer und gröſſer wird, je mehr n wächst. Daher kan man nun nicht annehmen, daß $1 - (\frac{c}{d})^n$ der 1 so nahe kömt, als man nur will, je gröſſer n gesetzt wird. Es ist also kein Wunder, daß die Formel am Ende des 197. §. etwas ungereimtes giebt, wenn man sie auf einen Fall anwendet, bey dem dasjenige nicht gilt, woraus sie ist hergeleitet worden.

Anmerkung.

§. 201. Auf die Art, wie die Summirung solcher unendlichen Reihen ist vorgetragen worden, fallen alle Schwierigkeiten und seltsam scheinende Sätze weg, die man sonst zuweilen dabey zu finden glaubt, als: daß eine unendliche Reihe gröſſer als eine andere sey, daß eine unendliche Reihe ein letztes Glied habe, und dieses Nichts seyn soll. Diese und andere Sätze enthalten gar nichts, das jemanden befremden könnte, wenn man die Wörter in den vorhin bestimmten Bedeutungen nimmt. Alles Paradoxe bey ihnen kömt auf unrichtig verstandene Ausdrücke an.

Als eine Anwendung dieser Rechnung läßt sich noch eine Wiederlegung eines berühmten Beweises beybringen, durch den Zeno vor Alters hat darthun wollen, daß keine Bewegung möglich sey, oder vielmehr, daß bey der Bewegung

wegung das Unbegreifliche statt finde: der Schnelleste werde das Langsamste nicht einholen.

Man stell sich vor in A sey Achilles,

$A \qquad S \qquad T \qquad V \quad W$

den Homer durch das Beywort, des Schnellfüßigen, bezeichnet, in S eine Schildkröte. Achilles sey hundertmal geschwinder als die Schildkröte, und in dem Augenblicke, da er zu laufen anfängt, fängt die Schildkröte an fortzukriechen. In der Zeit also, da er aus A in S kömt, ist sie aus S in T gekommen, so daß $ST = \frac{1}{100} AS$; und in der Zeit, da er durch ST läuft, kriecht sie durch $TV = \frac{1}{100} ST$, und in der Zeit, da er durch TV kömt, kömt sie durch $VW = \frac{1}{100} TV$, kurz, wenn er aus einer Stelle, wo er sich in irgend einem Augenblicke befand, in die Stelle gekommen ist, wo sich die Schildkröte in eben dem Augenblicke befand, so ist sie von dieser ihrer Stelle um $\frac{1}{100}$ der Entfernung beyder Stellen fortgekrochen, und er wird sie also nie erreichen.

Indessen erhält schon aus diesem Vortrage, daß Achilles der Schildkröte immer näher und näher kommen wird. Wenn sich also zeigen läßt, daß beyder Entfernung, in einer gewissen kurzen Zeit, kleiner als jede angebliche Grösse wird, so muß man wohl zugestehen, daß er sie erreiche.

Man setze die erste Entfernung AS, z. E. einer Meile, und nenne sie $= 1$; weil ST, TV, VW, und s. w. immer die folgende Entfernung hundertmal kleiner wird, als die vorhergehende, so machen diese Entfernungen nachstehende Reihe aus:

$$1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{100000000} - - -$$

wo

wo in §. 197. $a = 1 = b = c$, und $d = 100$. Stelle man sich also diese Reihe unendlich fortgesetzt vor, so ist ihre Summe nach dem Ausdrucke am Ende des 197. §. $\frac{1.100}{1.(100-1)}$

$= \frac{100}{99} = 1 + \frac{1}{99}$. Die Summe der Entfernungen also zwischen dem Achilles und der Schildkröte, so viel ihrer auch seyn mögen, das ist der Weg, den Achilles zurück zu legen hat, um die Schildkröte zu erreichen, beträgt nicht mehr als $1 + \frac{1}{99}$ Meilen, und wenn er also z. E. eine Meile in einer Stunde zurücke legt, so erreicht er in $1 + \frac{1}{99}$ Stunden die Schildkröte, die eine Meile vor ihm voraus hatte.

So läßt sich dieser Einwurf gegen die Möglichkeit der Bewegung auflösen, den man so wohl wegen des zum Beyspiele gebrauchten Helden, als wegen der Stärke, die man in diesem Einwurfe zu finden glaubet, Zenons Achilles genannt hat.

Die 70. Aufgabe.

§. 202. **Eine Grösse, die durch einen Buchstaben ausgedruckt ist, mit einer Grösse zu dividiren, die durch zwey Buchstaben ausgedruckt ist.**

Auflösung.

Die zu dividirende sey $= a$, die dividirende $= b + c$

$$b+c)\,a\,(\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ &c.}$$

$$a + \frac{ac}{b}$$

$$\frac{-ac}{b}$$

$$\frac{-ac}{b} \quad \frac{-ac^2}{b^2}$$

$$+\frac{ac^2}{b^2}$$

$$+\frac{ac^2}{b^2} \quad +\frac{ac^3}{b^3}$$

$$-\frac{ac^3}{b^3}$$

$$-\frac{ac^3}{b^3} \quad -\frac{ac^4}{b^4}$$

$$+\frac{ac^4}{b^4}$$ ꝛc.

Denn b in a dividirt, gibt $a:b$, dieſen Quotienten mit dem Diviſore $b+c$ multiplicirt, gibt $a+ac:b$, von dem Dividendo a abgezogen, bleibt $-ac:b$. Wird dieſer Reſt wieder mit b dividirt, gibt es $-ac:b^2$, und ſo weiter unendlich fort. Woraus auch ohne weiteres Dividiren alle Glieder nach einander gefunden werden: denn ein jeder Zehler iſt ein Product aus dem Dividendo und der Dignität des zweyten Theils des Diviſors, deren Exponent um 1 weniger als Glieder, der Nenner aber die Dignität des zweyten Theils, deren Exponent der Zahl der Glieder gleich. Und die ungraden Glieder haben $+$, die geraden aber $-$.

Der 1. Zuſatz.

§. 203. Man ſetze $a=1$, $b=2$, $c=1$, ſo iſt $a:b-ac:b^2$ ꝛc. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ ꝛc. Da nun $a:(b+c)=\frac{1}{3}$, ſo ſiehet man, daß das erſte Glied $=\frac{1}{2}$ zu viel, dahero das folgende Glied $=\frac{1}{4}$ abgezogen werden müſſe, welches $\frac{1}{4}$ gibt, welches wieder zu wenig; darum das folgende $=\frac{1}{8}$ zu addiren, ſo $\frac{3}{8}$ gibt, ſo wieder zu viel, u. ſ. w. welches klärlich anzeiget, daß ſo man die Reihe bey den ungraden Gliedern endiget, allemal etwas zu viel, bey den graden aber etwas zu wenig, doch daß der Fehler immer kleiner werde, und ſo klein werden kann, als man nur will, ſo daß man durch dieſe Reihe, wenn man ſie nur weit genug fortſetzt, dem eigentlichen Quotienten ſo nahe kommen kann, als man nur will.

Der 2. Zuſatz.

§. 204. Es gibt Fälle, da nach dieſem Ausdruck einer unendlichen Reihe dasjenige, was bey jedem Glied zu viel und zu wenig iſt, immer einerley bleibet, daß man dahero der wahren Zahl nicht näher komt, wodurch dieſer Ausdruck unnütz wird, als: Es ſey $a=1$, $b=1$, $c=1$, ſo iſt die Reihe $1-1+1-1+1$ ꝛc. Bey dem erſten Glied iſt um $\frac{1}{2}$ zu viel, bey dem zweyten um $\frac{1}{2}$ zu wenig, u. ſ. w. woraus erhellet, daß diejenige falſch geurtheilet haben, die behauptet, eine unendliche Anzahl Nullen ſeyen $=\frac{1}{2}$, weil $1-1=0$ ſey, und dieſes $1-1$, unendlich fort, gleich ſey $1:(1+1)=\frac{1}{2}$. Denn, wenn auch ihre Meynung einigen Schein haben ſollte, ſo müßten ſie zeigen können, daß die unendliche Anzahl der Glieder eine gerade Zahl ſey, denn wäre ſie ungerad, ſo würde $1-\frac{1}{2}$ ſeyn. Es iſt alſo hiebey weiter

nichts, als bey jedem Glied ist einerley Mangel, und wechselsweise entweder zu viel oder zu wenig.

Der 3. Zusatz.

§. 205. Ja, es gibt so gar Fälle, da der Fehler nicht nur immer gleich, sondern gar gröſſer wird, wodurch der Ausdruck noch unbrauchbarer wird, als es sey $a=1, b=1, c=2$, so ist $1-2+4-8+16-32+64$ &c.

Der 4. Zusatz.

§. 206. Hieraus erhellet, daß, wenn b nicht gröſſer als c angenommen wird, dieser Ausdruck durchaus unnützlich werde: denn man setze $b=c$, so werden alle Glieder $a:c$, und würde eben das erfolgen, was § 204. Setzt man $b<c$, und das um wie vielmal c gröſſer ist $=m$, so ist $bm=c$. wird nun dieses in die Reihe gesetzt,

so komt $\frac{a}{b} - \frac{am}{b} + \frac{am^2}{b} - \frac{am^3}{b}$ &c. welches anzeiget, daß der Fehler immer gröſſer werde, und daher die Reihe von der wahren Zahl immer weiter abweiche, wie §. 205.

Die 10. Erklärung.

§. 207. Wenn eine geometrische Progression von 1 anfangt und eine arithmetische von 0, so werden die letzten Glieder die Logarithmi der Glieder in der ersten, mit denen sie übereintreffen, genennet.

An-

Anmerkung.

§. 208. Die beyden Reihen seyen

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
0	1	2	3	4	5	6	7.

da ist 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 2, 3 der Logarithmus von 8, 6 von 64, ꝛc. Aus der Erklärung wird man leicht begreiffen, daß es einerley sey, was für ein Exponent und Differenz in den beyden Progressionen angenommen werde.

Die 71. Aufgabe.

§. 209. **Die Eigenschaften der Logarithmorum zu untersuchen.**

Auflösung.

Der Exponent sey $= m$, die Differenz $= d$, so ist

1	m^1	m^2	m^3	m^4	m^5	m^6	m^7	m^8
0	d	$2d$	$3d$	$4d$	$5d$	$6d$	$7d$	$8d$ ꝛc.

Wenn man diese beyde Progressionen mit Aufmerksamkeit betrachtet, so nimt man wahr

1) daß die Exponenten der Dignitäten in den Gliedern der geometrischen Progression selbsten die Logarithmi der Glieder sind: denn von 1 ist der Exponent 0 (§. 60.). Es sind also die Exponenten in folgender arithmetischen Progression 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ꝛc.

2) Daß die Summe derer Logarithmorum von zwey Zahlen gleich sey dem Logarithmo ihres Products, als $3d + 5d + 8d =$ dem Logarithmo von m^8, dem Product aus m^3 und m^5, welches auch daraus leicht

zu begreiffen, weil die Dignitäten durch addiren der Exponenten multiplicirt werden (§. 58.) und die Exponenten Logarithmi der Dignitäten sind.

3) Eben so gibt die Differenz der Logarithmorum zweyer Zahlen den Logarithmum ihres Quotienten (§. 59.) als $7d - 3d = 4d =$ Logar. von m^4, als dem Quotienten von m^7 und m^3.

4) Wenn der Logarithmus einer Zahl mit 2. 3. 4. ꝛc. dividirt wird, so bekomt man den Logarithmum von der 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Wurzel selbiger Zahl, $6d$ ist Logar. von m^6, wird nun $6d$ mit 3 dividirt, gibt es $2d$ den Logar. von m^2, welches die dritte oder Cubicwurzel von m^6 ist. (§. 63).

5) Auf gleiche Art komt durch die Multiplication des Logarithmi der Logarithmus der Dignität heraus, (§. 62.) $2d$ als Logarithmus von m^2 mit 4 multiplicirt, gibt $8d =$ Log. von m^8, so die vierte Dignität von m^2.

6) Wenn man von einer Dignität den Logarithmum haben will, so darf man nur den Logarithmum der Wurzel mit dem Exponenten multipliciren. Als man wollte von m^7 den Logarithmum haben, nimt man den Logarithmum von m, der d ist, und multiplicirt ihn mit dem Exponenten ^{7}, so hat man den verlangten Logarithmum $7d$.

Der 1. Zusatz.

§ 210. Weil der Bruch eigentlich ein Quotient aus der Division des Nenners in den Zehler ist, und der Nenner, wenn es ein eigentlicher Bruch ist, gröſſer als der Zehler ist, so wird der Logarithmus eines Bruchs

ne-

negativ, als von $\frac{m^3}{m^5}$ ist der Logarithmus $3d - 5d = -2d$. (§. 61.).

Der 2. Zusatz.

§. 211. Will man zwischen zwey Zahlen die mittlere Proportionalzahl suchen, so müssen sie multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel gezogen werden, dahero auch ihre Logarithmi addirt und die Summe halbirt werden muß, um den Logarithmum von der mittleren Proportionalzahl zu haben.

Der 9. willkührliche Satz.

§. 212. Man benennet den Logarithmum einer Zahl mit L oder l. Will man aber die Zahl selber wieder anzeigen, setzt man N vor L.

Der 1. Zusatz.

§. 213. Daher ist der Logarithmus von $'a = 'La$, von $ab = La + Lb$, von $\frac{a}{b} = La - Lb$, von $ax = xLa$, von $\sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3}La$, weil $\sqrt[3]{a^2} = a^{2:3}$ von $\sqrt[3]{a^2b^4} = \frac{2}{3}La + \frac{4}{3}Lb$, von $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}La + \frac{1}{2}Lb$ u. s. w. desgleichen $NLa = a$ ꝛc.

Der 2. Zusatz.

§. 214. Weil das letzte Glied in einer geometrischen Progression $= am^{n-1}$, so ist dessen Logarithmus

$La+(n-1)Lm$, wodurch die Beschwerlichkeit des multiplicirens gehoben wird.

Die 72. Aufgabe.

§. 215. Aus dem gegebenen ersten Glied dem Exponenten und der Summe einer geometrischen Progression die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $=a$ der Exponent $=m$, die Zahl der Glieder $=x$, so ist das letzte Glied am^{n-1}, die Summe $=c$, so ist

$$\frac{am-a=c}{m-1}$$

$$\frac{am-a=(m-1)c}{am=(m-1)c+a}$$

$$\frac{Lam=L((m-1)c+a)}{xLm=L((m-1)c+a)-La}$$

$$x=\frac{L((m-1)c+a)-La}{Lm}$$

(§. 213.)

(§. 103.).

Die 1. Anmerkung.

§. 216. Die Anfänger merken hier, daß wenn der Logarithmus von addirten oder subtrahirten Grössen zu nehmen ist, als hier von $(m-1)c+a$, man ja nicht setze $L(m-1)c+La$: denn das Addiren der Logarithmen erfordert, daß die Grössen vorher seyen multiplicirt gewesen (§. 20 .). Dahero dergleichen Grössen einzuschliessen und zusammen zu nehmen, und alsdenn erst L davor zu setzen, oder von ihnen der Logarithmus zu nehmen.

Die

Die 2. Anmerkung.

§. 217. Damit man die logarithmische Formel $x = \frac{L(c(m-1)+a) - La}{Lm}$ desto deutlicher verstehen möge, wollen wir solche mit einem Exempel erläutern: Es sey $a = 2$, $m = 3$, $c = 2186$, so ist $c(m-1) = 4372$, dazu addirt $a = 2$ gibt 4374, davon der Logarithmus in den gewöhnlichen Tabellen

$$L(c(m-1)+a) = 36408788$$
$$-La = 03010300$$
$$Lm = 4771212 \;)\; 33398488 \;(\; 7$$
$$33398484$$
$$4$$

also waren es 7 Glieder; daß aber die Division nicht genau aufgegangen, da es doch gen u 7 Glieder in der Progression sind, komt daher, weilen die Logarithmi in den Tabellen nur durch Näherung gefunden werden, dahero ein Fehler in der letzten oder auch zwey letzten Ziffern für nichts zu achten ist; zumalen es in diesem Fall $\frac{4}{4771212} = \frac{1}{1192803}$ ein Fehler ist, den man nicht angeben, folglich für nichts halten kann.

Die 73. Aufgabe.

§. 218. Aus der gegebenen Summe, dem ersten und letzten Glied einer geometrischen Progression, die Zahl der Glieder und den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$
das letzte $= b$
die Summe $= c$

die

die Zahl der Glieder $= x$
der Exponent $- y$, so ist

$$\frac{b-a}{y-1} + b = c$$

$$b - a + by - b = cy - c$$

$$c - a = cy - by$$

$$\frac{c-a}{c-b} = y$$

$$ay^{x-1} = b$$

$$La + (x-1)Ly = Lb$$

$$(x-1)Ly = Ly - La$$

$$Ly = \frac{Lb - La}{x-1}$$

$$L(c-a) - L(c-b) = Ly$$

$$L(c-a) - L(c-b) = \frac{Lb - La}{x-1}$$

$$(x-1)(L(c-a) - L(c-b) = Lb - La$$

$$x - 1 = \frac{Lb - La}{L(c-a) - L(c-b)}$$

$$x = \frac{Lb - La}{L(c-a) - L(c-b)} + 1$$

Es sey $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$, so ist $y =$
$\frac{728}{728} = \frac{2}{486} = \frac{726}{842} = 3$

$$Lb = 26866363$$
$$La = 03010300$$
$$Lb - La = 23856063$$
$$L(c-a) = 28609366$$
$$L(c-b) = 23838154$$
$$L(c-a) - L(c-b) = 4771212$$

$$4771212 \,)\, \begin{matrix} 23856063 \\ 23856060 \end{matrix} \,(\, 5 + 1 = 6 = x$$

3

Die

Die 74. Aufgabe.

§. 219. Ein Capital soll in drey Jahrsfristen mit dem Zinß a 5 pro Cent dergestalt bezahlet werden, daß jedes Jahr gleich viel von Capital und Zinß zusammen genommen bezahlt werde, wie viel wird jedes Jahr am Capital abgetragen?

Auflösung.

Das Capital sey $= a$
das erste Jahr werde bezahlt $= x$
das zweyte - - - - - - $= y$
folglich das dritte $= a - x - y$
und da 5 pro Cent $\frac{1}{20}$ vom Capital ist, so wird im
ersten Jahr an Zinsen bezahlt $\frac{1}{20}a$
im zweyten $\frac{1}{20}(a - x)$
im dritten $\frac{1}{20}a\ (-x-y)$
Folglich ist

$$x + \tfrac{1}{20}a = \tfrac{1}{20}(a-x) + y$$

$$21x + a = a - x + 20y$$

$$21x = 20y$$

$$\frac{21x}{20} = y$$

Eben so

$$x + \tfrac{1}{20}a = \tfrac{1}{20}(a-x-y) + a - x - y$$

$$20x + a = a - x - y + 20a - 20x - 20y$$

$$41x = 20a - 21y$$

$$21y = 20a - 41x$$

$$y = \frac{20a}{21} - \frac{41x}{21}$$

$$\frac{21x}{20} = \frac{20a}{21} - \frac{41x}{21}$$

$$\frac{441x}{20} = 20a - 41x$$

$$441x = 400a - 820x$$

$$1261x = 400a$$

$$x = \frac{400}{1261}a$$

Es seye $a = 2522$, so ist $x = \frac{400.2522}{1261} = \frac{1008800}{1261}$

$= 800$, und weil $y = \frac{21}{20}x$, so ist $y = \frac{21.800.}{20} =$

$\frac{16800}{20} = 840$, folglich im dritten Jahr 882.

Probe:

1 Jahr 800, + Zinß vom ganzen 126 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.
2 Jahr 840, + Zinß von 1722, 86 fl 6 kr. = 926 fl. 6 kr.
3 Jahr 882, + Zinß von 882, 44 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.

Die 75. Aufgabe.

§. 220. Vorhergehende Aufgabe allgemein aufzulösen.

Auflösung.

Das Capital seye $= a$

der Zinß von dem Capital seye $= \frac{n}{m}$

das

das erſte Jahr werde bezahlt x

das zweyte y

das dritte z

das vierte v

das fünfte q ꝛc.

Es wird demnach bezahlt

im 1 Jahr $x + \frac{na}{m} = \frac{mx + na}{m}$

2. $y + \frac{n(a-x)}{m} = \frac{my + na - nx}{m}$

3. $z + \frac{n(a-x-y)}{m} = \frac{mz + na - nx - ny}{m}$

4. $v + \frac{n(a-x-y-z)}{m} = \frac{mv + na - nx - ny - nz}{m}$

5. $q + \frac{n(a-x-y-z-v)}{m} = \frac{mq + na - nx - ny - nz - nv}{m}$

Es iſt

$$\frac{mx + na}{m} = \frac{my + na - nx}{m}$$

$$mx + na = my + na - nx$$

$$mx + nx = my$$

$$\frac{(m+n)x}{m} = y$$

Fer-

Ferner

$$\frac{my+na-nx=mz+na-ux-nz}{\frac{my+ny=mz}{\frac{(m+n)y=z}{m}}}$$

Desgleichen

$$\frac{mz+na-nx-ny=mv+na-nx-ny-nz}{\frac{mz+nz=mv}{\frac{(m+n)z=v}{m}}}$$

Eben ſo

$$\frac{mv+na-nx-ny-nz=mq+na-nx-ny-nz+nv}{\frac{mv+nv=mq}{\frac{(m+n)v=q}{m}}}$$

Hieraus iſt klar, daß in den Jahren nach einander am Capital abgetragen werde

1) $x=x \qquad =x\ (1)$

2) $y=x\frac{(m+n)}{m} \qquad =x\ \frac{(m+n)}{m}$

3) $z=y\frac{(m+n)}{m} \qquad =x\ \frac{(m+n)^2}{m^2}$

4) $v=z\frac{(m+n)}{m} \qquad =x\ \frac{(m+n)^3}{m^3}$

5) $q=v\frac{(m+n)}{m} \qquad =x\ \frac{(m+n)^4}{m^4}$ ꝛc.

denn $y=x\ \frac{(m+n)}{m}$ folglich $z=x\ \frac{(m+n)}{m}$

$$\frac{(m+n)}{m}=x\ \frac{(m+n)^2}{m^2}$$ u. ſ. w.

Und

Und da eine jede Zahlung $\frac{m+n}{m}$ von vorjähriger Zahlung ist, das ist, $1+\frac{n}{m}$, so kann, wenn die erste Zahlungssumme gefunden worden, die folgende gefunden werden, wenn nur der Zinß $=\frac{n}{m}$ der vorigen zu ihr addirt wird.

Nicht weniger zeiget sich, daß alle Zahlungstermine zusammen genommen, eine geometrische Progression ausmachen, deren erstes Glied $=1$, deren Exponent $\frac{m+n}{m}$, und die Zahl der Glieder, so gros als die Zahl der Termine ist, wenn solche Progression mit x multiplicirt worden. Man nenne indessen diese Progression p, so sind alle Zahlungen zusammen genommen $=px$. Da aber dieses die ganze zu zahlende Summe ausmacht, so ist $px=a$

$$x=\frac{a}{p}$$

Hieraus können folgende Regeln gezogen werden,

1) Das Interesse ist ein Bruch von dem Capital, als: $\frac{1}{20}$ wenn man 5 pro Cent gibt; $\frac{3}{50}$, wenn man 6 pro Cent gibt. Dieses Bruchs Nenner und Zehler addirt, und setzet bruchweiß darunter den Nenner, als $\frac{21}{20}$ oder $\frac{53}{50}$, ꝛc so habt ihr den Exponenten zu folgender Progression.

2) Summiret eine geometrische Progression, deren erstes Glied 1, der Exponent der N. 1. gefundene

Bruch, die Zahl der Glieder, so viel als Jahre gegeben sind.

3) Diese Summe dividirt in das gegebene Capital, so habt ihr, was im ersten Jahr zu zahlen ist.

4) Addirt den Zinß des ersten Termins zum ersten, so habt ihr den zweyten, desgleichen den Zinß des zweyten zum zweyten, so habt ihr den dritten, u. s. w.

5) Rechnet allezeit den Zinß von dem noch stehen gebliebenen Capital darzu.

Zum Exempel: 68962 fl. soll auf vier Jahr samt dem Zinß zu 5 pro Cent bezahlt werden, so ist die Progression

$$1 \quad \frac{21}{20} \quad \frac{441}{400} \quad \frac{9261}{8000}$$

deren Summe ist $\frac{34481}{8000}$, in 68962 dividirt, gibt 16000, der Zinß dazu 800 = 16800, fürs zweyte Jahr; der Zinß dazu 840 = 17640 fürs dritte Jahr; der Zinß dazu 882 = 18522, fürs vierte Jahr, also

1. 16000 + Z. vom ganzen 3448 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
2. 16800 + Z. v. 52962; 2648 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
3. 17640 + Z. v. 36162; 1808 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
4. 18522 + Z. v. 18522; 926 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.

68962

Der 1. Zusatz.

§. 221. Setzt man die Zahl der Jahre = v, so ist das letzte Glied = $\frac{(m+n)^{v-1}}{m^{v-1}}$ und der Exponent weniger 1 = $\frac{(m+n)}{m} - 1 = \frac{n}{m}$ dahero die Summe der Progression $\left(\left(\frac{m+n}{m}\right)^{v} - 1\right) : \frac{n}{m} = \frac{m\left(\frac{m+n}{m}\right)^{v}}{nm^{v}} - \frac{m}{n}$

folg-

folglich ist $\frac{\frac{xm(m+n)^{v}}{nm^{v}} - \frac{xm}{n}}{xm(m+n)^{v} - xm^{v+1}} = a$

$x = \frac{anm^{v}}{m(m+n)^{v} - m^{v+1}}$

$= \frac{anm^{v-1}}{(m+n)^{v} - m^{v}}$

Der 2. Zusatz.

§. 222. Addiret man den Zinß des ersten Jahrs $= \frac{an}{m}$ dazu, so hat man, was jedes Jahr überhaupt zu zahlen sey, nemlich $\frac{anm^{v-1}}{(m+n)^{v} - m^{v}} + \frac{an}{m} =$

$\frac{anm^{v} + an(m+n)^{v} - anm^{v}}{m(m+n)^{v} - m^{v+1}} = \frac{an(m+n)^{v}}{m(m+n)^{v} - m^{v+1}}$

das ist, das Interesse vom ganzen Capital wird mit $(m+n)^{v}$ multiplicirt und mit $(m+n)^{v} - m^{v+1}$ dividirt.

Der 3. Zusatz.

§. 223. Es wäre einer ein Capital baar zu zahlen schuldig; es wäre aber so wohl dem Glaubiger als Schuldner bequem, daß solches in etlichen Terminen geschehen mögte, jedesmal mit gleicher Summe samt dem Zinß: so würde die Formel §. 222. die Summe bestimmen.

Die 76. Aufgabe.

§. 224. Eine Regel zur Rabbatrechnung zu finden, das ist, wenn ein Capital erst nach etlichen Jahren ohne Zinß zu zahlen wäre, wie viel jetzt baar bezahlt werden müßte.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß, ein Bruch vom Capital $= \frac{n}{m}$

die Zahl der Jahre $= r$

die Summe, die baar zu zahlen, $= x$

Weil $\frac{n}{m}$ ein Bruch von dem ganzen Capital ist, so würde das Capital nach Verlauf eines Jahrs, wenn es 1 wäre, seyn $1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}$; ist aber das Capital x, so wird man nach der Regel de Tri mit Verfluß des Jahrs davon haben $x \frac{(m+n)}{m}$; denn man würde sprechen müssen: 1 gibt $\frac{m+n}{m}$, was gibt x?

Legt

Legt man nun $x\frac{(m+n)}{m}$ wieder zu Capital an, so hat man nach Verlauf des zweyten Jahrs $x\frac{(m+n)^2}{m^2}$ nach der Regel de Tri :

1 gibt $\frac{m+n}{m}$, was $x\frac{(m+n)}{m}$

Auf gleiche Art würde man mit End des dritten Jahrs haben $x\frac{(m+n)^3}{m^3}$ und überhaupt, so viel es Jahre sind, so hoch steigt der Exponent der Dignität von $\frac{m+n}{m}$. In den Jahren r wird es demnach seyn $x.\frac{(m+n)^r}{m^r}$. Nun muß dieses dem schuldigen Capital gleich seyn, weil der Glaubiger auf diese Zeit so viel haben soll, folglich $x\frac{(m+n)^r}{m^r}=a$

$$x(m+n)^r=am^r$$

$$x=\frac{am^r}{(m+n)^r}$$

Die Regel iſt alſo:

1) Multiplicirt den Nenner des Bruchs, der den Zinß, als den Theil vom Ganzen, anzeigt, ſo vielmal in ſich ſelber, als Jahre gegeben ſind, und multipliciret, was heraus gekommen, mit dem gegebenen Capital.

2) Eben ſo vielmal multipliciret in ſich ſelbſt die Summe aus dem Zehler und Nenner des Zinßbruchs, und dividiret das heraus gekommene in erſteres Product.

Zum Exempel: Das Capital ſeye 1000 fl. die Jahre 4, Zinß 5 vom hundert, daher der Bruch $\frac{1}{20}$ iſt.

20	21	160000
20	21	1000
400	21	194481) 160000000 (822$\frac{136618}{194481}$
20	42	1555848
8000	441	441520
20	21	388962
16000	441	525580
	882	388962
	9261	136618.
	21	
	9261	
	18522	
	194481	

Der 1. Zuſatz.

§. 225. Mit Logarithmis gehet es leichter, da obige Aequation alſo zu ſtehen komt:

$$Lx = La + r\,Lm - r\,L\,(m+n)$$
$$= La - r\,(L\,(m+n) - Lm)$$

Voriges Exempel wird demnach alſo aufgelöſet:

L. von

L. von 1000 =	30000000
L. von 20, 4mal	51041200
	8204.200
L. von 21, 4mal	52888772
	29152428

dem in den Tabellen am nächsten komt $822\frac{17}{18}$.

Der 2. Zusatz.

§. 226. Wäre ein Capital zielerweis ohne Zinß zu bezahlen, und zwar das erstemal gleich baar $= a$, das folgende Jahr wieder $= a$, u. s. w. so würde an statt des zweyten Termins zu zahlen seyn $am : (m+n)$, statt des dritten $am^2 : (m+n)^2$ u. s. w. folglich für den letzten, wenn die Zieler $= r$, $am^{r-1} : (m+n^{r-1})$, welches eine geometrische Progression gibt, davon das gröste Glied $= a$, das kleinste $= am^{r-1} : (m+n)^{r-1}$, der Exponent $(m+n) : m$ dahero das Glied weiter als das gröste $= a(m+n) : m$ beyder Differenz $a(m+n) : m - am^{r-1} : (m+n)^{r-1} = a((m+n)^r - m^r) : m(m+n)^{r-1}$ mit dem Exponenten weniger eins $= n : m$ dividirt $= a((m+n)^r - m^r) : n(m+n)^{r-1}$, welches den Wehrt ausdruckt, wie viel zu bezahlen wäre, wenn die Zahlung baar geschehen sollte.

Der 3. Zusatz.

§. 227. Sollte erst nach Verfluß des ersten Jahrs der erste Termin bezahlt werden, so würde für den ersten $am : (m+n)$ und für den letzten $am^r (m+n)^r$ zu bezahlen seyn und das weitere Glied über das gröste würde seyn $= a$, beyder Differenz aber $a - am : (m+n)^r = a((m+n)^r - m^r) : (m+n)^r$ mit $n : m$ divi-

dividirt $am((m+n)^r - m^r) : n(m+n)^r$, welches die Formel für diesen Fall gibt.

Die 77. Aufgabe.

§. 228. Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder in einer geometrischen Progression verändert werden können, daß sie dennoch proportional bleiben.

Auflösung.

Verändert sie auf alle mögliche Weise, und untersuchet ob das Product der beyden äussern Glieder dem Product der beyden mittlern gleich seye, (§. 127.) oder ob der Exponent der beyden ersten dem Exponenten der beyden letztern gleich seye. Ist es so, so habt ihr noch eine Proportion; wo nicht, so ist auch keine Proportion mehr.

Das erste Glied seye $= a$, das dritte $= b$, der Exponent $= m$, so ist

$a : ma = b : mb$

1) $a : b = ma : mb$

2) $ma : a = mb : b$

3) $a + ma : a = b + mb : b$

4) $a + ma : ma = b + mb : mb$

5) $ma - a : ma = mb - b : mb$

6) $ma - a : a = mb - b : b$

7) $a^n : a^n m^n = b^n : b^n m^n$

8) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$

$a : ma = b : mb$

$b : mb - b : mb$

9) ab

9) $ab : m^2\,ab = b^2 : m^2\,b^2$
$c \quad mc = b : mb$

10) $acb : m^3\,abc = b^3 : m^3\,b^3$ ꝛc.

11) $ac : amc = b : mb$

12) $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

13) $ac : ma = bc : mb$

14) $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$

15) $ac : mac = bd : mbd$

16) $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$a : ma = b : mb$
$ma : mna = mb : mnb$

17) $a : mna = b : mnb$
$a : ma = b : mb$
$ma : c = d : b$

18) $a : c = d : mb$

Anmerkung.

§. 229. Man hat Urſache, dieſe Eigenſchaften der geometriſchen Proportion ſich bekannt zu machen, weil die Proportion, wegen ihrem vielfältigen Nutzen, die Seele der Mathematick iſt. Wir haben ſie aber bis hieher verſparet, weil wir noch wenig Gelegenheit gehabt, ihren Nutzen zu zei-

gen, und ohne ſolches werden die wichtigſten Wahrheiten von Anfängern öfters für gering gehalten und vernachläſſiget.

Die 78. Aufgabe.

§. 230. Wann ein Gefäß voll Wein iſt, und aus demſelben eine gewiſſe gegebene Quantität heraus gelaſſen, mit ſo viel Waſſer wieder angefüllt, und dieſes etlichmal wiederholt wird, aus Verhältnis des noch übrigen Weins zum Waſſer den Inhalt des Gefäſſes zu finden.

Auflöſung.

Das Gefäß halte $= x$
es werde heraus gelaſſen $= m$
wie vielmal ſolches geſchehen $= n$
das Verhältnis des Waſſers zum Wein $= a : v$
Wird das erſtemal Wein $= m$ heraus gelaſſen und mit Waſſer angefüllt, ſo bleibt an Wein übrig $= x - m$, und das ganze Gefäß verhält ſich zum übrigen Wein $= x : x - m$; wird wiederum $= m$ heraus gelaſſen, ſo lauft Waſſer und Wein nach Proportion heraus, nemlich um ſo viel jetzt Wein weniger im Gefäß iſt, als von Anfang geweſen, um ſo viel weniger lauft auch heraus, alſo verhält ſich, wie das ganze Gefäß zum erſtmaligen Reſt des Weins ſo, wie dieſer Reſt zum Reſt, nach der zweyten Ablaſſung der Gröſſe m
$x : x - m = x - m : (x - m)^2 : x$.

Desgleichen bey dem dritten Herauslaſſen

$$x \cdot x - m = \frac{(x-m)^2}{x} : \frac{(x-m)^3}{x^2}$$

Und

Und so gehet es weiter fort, daß endlich der letzte Weinrest $=(x-m)^n : : x^{n-1}$,
das Wasser $x-(x-m)^n : x^{n-1}$, dahero

$$a : v = x - \frac{(x-m)^n}{x^{n-1}} : \frac{(x-m)^n}{x^{n-1}}$$

$$a : v = x^n - (x-m)^n : (x-m)^n \text{ (§. 228. n. 11.)}$$

$$a+v : v = x^n : (x-m)^n \text{ (§ 228 n. 4.}$$

$$\sqrt[n]{a+v} : \sqrt[n]{v} = x : x-m \text{ (§. 228 n. 8.)}$$

$$\sqrt[n]{a+v} - \sqrt[n]{v} : \sqrt[n]{a+v} = m : x \text{ (§. 228. n. 6.)}$$

Es sey $a=19$, $v=8$, $n=3$, $m=4$, so ist

$$\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = 4 : x$$
$$3 - 2 : 3 = 4 : x$$
$$1 : 3 = 4 : 12$$

Der 1. Zusatz.

§. 231. Wenn die Grössen a und v just so groß angenommen werden, als der Wein und das Wasser, so wird $a+v=x$, und die Proportion §. 230. bleibt noch

$$a+v : v = x^n : (x-m)^n$$
$$x : v = x^n : (x-m)^n$$
$$1 : v = x^{n-1} : (x-m)^n$$

Wenn also der Inhalt des Gefässes $=x$, das aufeinmal heraus gelassene $=m$, und wie vielmal solches geschehen $=n$ gegeben ist, so kann der Wein, der übrig geblieben ist, leicht gefunden werden.

$$x^{n-1} : (x-m)^n = 1 : v$$

nach

nach vorigem Exempel

$12^2 : 8^3 = 1 : v$

$144 : 512$

8) $18 : 64$

2) $9 : 32$

9) $32 (3\frac{5}{9} =$ Wein

$\frac{27}{5}$

$8\frac{4}{9} =$ Waſſer.

dahero verhält ſich das Waſſer zum Wein

$8\frac{4}{9} : 3\frac{5}{9}$

9) $76 : 32$

4) $19 : 8$

Der 2. Zuſatz.

§. 232. Aus der Proportion $1 : v = x^{n-1} : (x - m)^n$ komt folgende Aequation

$$(x - m)^n = vx^{n-1}$$

$$nL(x - m) = Lv + nLx - Lx$$

$$Lx - Lv = nLx - nL(x - m)$$

$$\frac{Lx - Lv}{(Lx - L(x - m))} = n$$

Wenn man alſo wiſſen will, wie vielmal das Herauslaſſen zu wiederholen ſey, damit eine gewiſſe verlangte Quantität Wein übrig bleibe, ſo gibt dieſe Formel die Regel dazu. Z. E. Das Gefäß hielte 108 Maas, man wollte 32 Maas übrig behalten, und lieſſe jedesmal 36 Maas heraus: ſo wäre

$Lx = 20334238$

$Lv = 15051500$

$$Lx - Lv = 5282738$$
$$Lx = 20334238$$
$$L(x-m) = 18573325$$
$$Lx - L(x-m) = 1760913$$

1760913) 5282738 (3mal
5282739
— 1

Käme ein Bruch heraus entweder allein oder mit ganzen, so müßte nicht das ganze m, sondern nur ein Theil davon, nach Maasgab des Bruchs, heraus gelassen werden.

Der 3. Zusatz.

§. 233. Wäre alles bekannt, wie §. 232, und man wollte finden, wie viel auf einmal heraus zu lassen, so käme

$$(x-m)^n = vx^{n-1}$$

$$x - m = \sqrt[n]{vx^{n-1}}$$

$$x - \sqrt[n]{vx^{n-1}} = m$$

Anmerkung.

§. 233. Auf eben diese Art verfährt man, wenn von einem Stück Silber etlichmal ein Stück abgeschnitten und mit Kupfer ersetzt wird.

Die 79. Aufgabe.

§. 235. Wenn man ein Capital hat, davon der Zinß zum jährlichen Unterhalt nicht zureicht, son-

sondern jährlich vom Capital etwas zugeschossen werden muß, zu finden, wenn das Capital aufgezehret werde.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß $= \frac{n}{m}$

der Zuschuß bey dem End des ersten Jahrs $= b$
die Anzahl der Jahre $= x$

Es ist klar, daß, da das Capital mit Schluß des ersten Jahrs um die Grösse b weniger worden: also auch um $nb : m$ weniger Zinß trage, folglich zu End des zweyten Jahrs über b noch $nb : m$ müsse zugeschossen werden, daß also der Zuschuß mit Schluß des zweyten Jahrs $= b + nb : m = b(m+n) : m$

Hieraus folgt diese Verhältniß: wer ein Jahr b zuschießt, muß das andere $b(m+n) : m$ zuschiessen.

$$b : b(m+n) : m$$
$$1 : (m+n) : m$$

daher kann durch die Regel de Tri gefunden werden, was mit Schluß des dritten Jahrs zugeschossen werden müsse: dann wer dieses Jahr 1 zuschießt, muß übers Jahr $(m+n) : m$ zuschiessen.

$$1 : \frac{m+n}{m} = b : \frac{(m+n)}{m} : \frac{b(m+n)^2}{m^2}$$

Hieraus siehet man schon, daß in dem vierten Jahr $(b(m+n)^3 : m^3$ u. s. w. zugeschossen werden müsse, und folglich in dem letzten Jahr $b(m+n)^{x-1} : m^{x-1}$.

Alle Zuschüsse machen demnach zusammen genommen eine geometrische Progression aus, davon das erste Glied

Glied $= b$, das letzte $= b\,(m+n)^{x-1} : m^{x-1}$, der Exponent $(m+n) : m$. Daher die Differenz des ersten und eines weitern als des letzten $= b\,\frac{(m+n)^x}{m^x} - b\,(m+n^x : m^x - b)$ mit $\frac{(m+n)}{n} - 1 =$ $\frac{n}{m}$ dividirt, gibt die Summe $= mb\,\frac{(m+n^x)}{nm^x} - \frac{mb}{n}$,

da nun die Summe aller Zuschüsse dem Capital gleich seyn muß, wenn es aufgehen soll, so ist

$$\frac{mb\,(m+n)^x}{nm^x} - \frac{mb}{n} = a$$

$$\frac{mb\,(m+n)^x}{nm^x} = a + \frac{mb}{n}$$

$$b\,\frac{(m+n)^x}{m^x} = \frac{na}{m} + b$$

$$Lb + x\,L\,(m+n) - x\,L\,m = L\left(\frac{na}{m} + b\right)$$

$$x\,L\,(m+n) - x\,Lm = L\left(\frac{na}{m} + b\right) - Lb$$

$$x = \frac{\left(L\left(\frac{na}{m} + b\right) - Lb\right)}{(L(m+n) - Lm)}$$

Es sey $a = 5000$, der Zinß 5 pro Cent, so ist der Zinß $= \frac{an}{m} = 250$, b sey $= 50$, $\frac{an}{m} + b = 300$

$$L\ 300 = 24771212$$
$$L\ 50 = 16987700$$
$$7781512$$

$L21$ 13222193
$L20$ 13010300
211893

211893) 7781512 (36 $\frac{153364}{211893}$, das ist, 36 Jahre 264
635679 Tage.
1424722
1271358
153364

Anmerkung.

§. 236. Es ist zwar an dem, daß man diese Aufgabe auch nach der gemeinen Rechenkunst hätte auflösen können, da man mit Schluß des ersten Jahrs 50 von 5000 subtrahirt, blieb 4950, davon das Interesse 247 fl. 30 kr., so würde zum Unterhalt Zuschuß im zweyten Jahre erfordert 52 fl. 30 kr. die müssen wieder von 4950 subtrahirt werden, u. s. w. bis endlich das ganze Capital aufgehet. Wer siehet aber nicht die grosse Beschwerlichkeit im Rechnen? Darum dient die Algebra nicht nur dazu, solche Aufgaben aufzulösen, die der gemeinen Rechenkunst unmöglich, sondern auch die möglichen ungemein zu erleichtern.

Der 1. Zusatz.

§. 237. Nennt man das, was jährlich verzehrt wird c, so ist $c = \frac{an}{m} + b$, und $b = c - \frac{an}{m}$, setzt man solches in obige Aequation $\frac{b(m+n)^x}{m^x} = \frac{na}{m} + b$, so komt

c—

$$c\frac{(m+n)^x}{m^x} - \frac{an}{m}\frac{(m+n)^x}{m^x} = c$$

Will man dahero wissen, wie viel man des Jahrs verzehren dörfe, daß ein Capital in gewisser Zeit aufgehe, welches bey Rechnungen von Leibrenthen gebraucht werden kan, darf man nur statt c setzen x und statt x die gegebene Zeit r, so komt folgende Aequation:

$$x\frac{(m+n)^r}{m^r} - \frac{an}{m}\frac{(m+n)^r}{m^r} = x$$

$$x(m+n)^r - \frac{an}{m}(m+n)^r = m^r x$$

$$x = (m+n)^r - xm^r = \frac{an}{m}(m+n)^r$$

$$x = \frac{\frac{an}{m}(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$$

oder weil $\frac{an}{m}$ der Zinß vom gegebenen Capital, den man v nennen kan $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$

Der 2. Zusatz.

§. 238. So bey einer Fabrik Instrumenten in gewissen Jahren unbrauchbar werden, und folglich das darein gesteckte Capital aufgezehret wird, so gilt auch die Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$, um zu finden, wie viel das

von auf ein Jahr zu rechnen sey. Eben so läßt sich hieraus berechnen, welches vortheilhafter sey, ein gewisses Capital in etwas zu stecken, das nach gewissen Jahren unbrauchbar wird, oder solches zu miethen und einen jährlichen Zinß daraus zu geben. Beträgt die Formel §. 237. mehr, als der zu gebende Zinß, so ist das Miethen besser, und so auch umgewandt.

Der 3. Zusatz.

§. 239. Nimmt einer ein Capital auf, und gibt statt des Zinßes ein Gut zu benutzen (pactum antichreticum), welches mehr als den Zinß erträgt, so wird das Capital auch jährlich um so viel geringer, als der Ertrag der Guts den Zinß übersteiget, folglich muß auch jährlich solches weniger Zinß tragen. Wird nun der Ueberfluß des Ertrags über den Zinß b genennet, so kann nach obiger Formel (§. 235.)

$$x = \frac{L\left(\frac{na}{m} + b\right) - Lb}{L(m+n) - Lm}$$

die Zeit gefunden werden, wenn das Capital durch Benutzung des Guts abbezahlt wird.

Der 4. Zusatz.

§. 240. Will man wissen, wie gros das Capital seyn müsse, das es in gegebenen Jahren aufgezehret werde, wenn man jährlich eine gewisse Summ damit zu bestreiten hat: so darf man nur in die Formel (§. 237.) anstatt a setzen x, und statt x die gegebene Jahre r also

$$\text{statt } \frac{c(m+n)^x}{m^x} - \frac{an(m+n)^x}{m\ m^x} = c$$

$$c(m+n)$$

$$\frac{c(m+n)^r}{m^r} - \frac{xn}{m}(m+n)^r = c$$

$$c(m+n)^r - \frac{xn}{m}(m+n)^r = cm^r$$

$$c(m+n)^r - cm^r = \frac{xn}{m}(m+n)^r$$

$$\frac{c((m+n)^r - m^r)}{(m+n)^r} = \frac{xn}{m}$$

$$\frac{cm((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^r} = x$$

Dieſes kan in dem Fall gebraucht werden, wenn ich auf ein Gut Geld aufnehme, und dagegen ſolches auf etliche Jahre zu benutzen gebe, um zu wiſſen, wie ein groſſes Capital ich nehmen dörfe, damit ich nach Verfluß dieſer Jahre das Gut wieder frey bekomme. Z. E. Das Gut ertrage 100 fl. ich wills auf 9 Jahre geben, wie viel darf ich darauf nehmen, daß ichs nach dieſer Zeit wieder frey bekomme?

$c = 100$, $r = 9$, $m = 20$, $n = 1$, folglich 2000

$$\frac{(21^9 - 20^9)}{21^9} = x = 710 \text{ fl. } 45\tfrac{1}{2} \text{ kr.}$$

Der 5. Zuſatz.

§. 241. Soll mit dem, der ein Gut für ein geſchoſſenes Capital zu nutzen bekommen, liquidirt werden, wie viel ihme nach einigen Jahren noch an dem Capital zu zahlen ſeye, wenn der Ertrag die Zinße übertroffen, ſo komts auf gleiche Rechnung an. Der Ueberſchuß ſey $= b$, das Capital $= a$, die Zahl der Jahre, $= r$, und der Zinß $= \frac{n}{m}$, ſo gehet

1. Jahr ab b
2. $b\,\frac{(m+n)}{m}$
3. $b\,\frac{(m+n)^2}{m^2}$

im letzten $b\,\frac{(m+n)^{r-1}}{m^{r-1}}$

wird diese Progression summirt und vom Capital abgezogen, so hat man das verlangte

$$\frac{b(m+n)^r-b}{m^r} : \frac{n}{m} = \frac{nb(m+n)^r}{n\,m^r} - \frac{mb}{n}$$

also ist zu bezahlen $a+\frac{mb}{n}-\frac{mb(m+n)^r}{nm^r}$

Anmerkung.

§. 242. Vielleicht werden diejenige, die dem Buchstaben der Gesetze nachgehen, mit einigen bisher angebrachten Aufgaben nicht zufrieden seyn, weil Wucher auf Wucher, oder Zinß von Zinßen, gerechnet worden, welches nach denen Gesetzen nicht erlaubt, und also davor halten, dieses seyen unnütze Grillen, die man nirgends brauchen könnte. Allein es ist ein anders, ein Capital anlegen, und wenn der Schuldner den Zinß nicht zahlen kan, solchen zum Capital schlagen, und wieder ein anders in gewissen Fällen, um niemand unrecht zu thun, Zinß von Zinßen zu rechnen. Als wenn ich Cajo über 4 Jahre 1000 fl. zahlen sollte, so würden mir innerhalb dieser Zeit diese 1000 fl. im ersten Jahr 50 fl. Zinß tragen. Diesen Zinß lasse ich nicht müßig liegen, er muß mir im zweyten Jahr 2 fl. 30 kr. tragen, und so weiter in den folgenden Jahren. Geschehe mir nicht da gros unrecht, wenn ich in der Rabbatrechnung nicht Zinß von Zinßen

mit

mit berechnen dörfte? zumalen die Gesetze gar nicht davon, sondern von ausgelehnten Capitalien handeln. Und eben so ist es mit den übrigen Aufgaben; davon wir aber Kürze halben nichts gedenken wollen.

Die 80. Aufgabe.

§. 243. Eine Regel zu finden, wie hoch ein Capital in gewissen Jahren, wenn die Zinße jederzeit wieder zu Capital angelegt worden, steigen werde.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß $= \frac{n}{m}$

die Jahre $= r$

Mit Verfluß des ersten Jahrs hat man $a + an : m = a(m+n) : m$. Siehet man dieses wieder als ein Capital an, so schließt man nach der Regel de Tri: a gibt $a(m+n) : m$, was gibt $a(m+n) : m$, welches gibt $a(m+n)^2 : m^2$ u. s. w. in dem dritten Jahr. Dahero komt für die Jahre $\frac{a(m+n)^r}{m^r}$

Die 81. Aufgabe.

§. 245. Einer gibt jährlich von seinem Vermögen eine gewisse Summe aus, erwirbt mit dem übrigen jährlich einen gewissen Theil davon, als $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{5}$ ꝛc. nach Verfluß gewisser Jahren hat er noch etlichemal so viel, als er Anfangs gehabt, wie gros war sein Vermögen?

Auflösung.

Er habe anfänglich gehabt $= x$

gibt jährlich aus $= c$

erwirbt mit dem Rest $= \frac{n}{m}$

die gegebene Jahre $= r$

wie vielmal das Vermögen vermehrt worden $= p$

gibt er gleich im Anfang des ersten Jahrs aus c, so hat er noch $x - c$, und mit Ende dieses Jahrs $x - c + n(x - c) : m$, das ist zu dem ganzen $x - c$, soll ein Bruch davon, nemlich $n(x - c) : m$, addiret werden, welches eben so viel, als ob $x - c$ mit $1 + n : m = (m + n) : m$ multiplicirt würde, welches also gibt $(x - c)(m + n) : m = (m + n)x : m - (m + n)c : m$. Zu Anfang des zweyten Jahrs gibt er wieder aus c, hat also noch $(m + n)x : m - (m + n)c : m - c$, dazu gewinnt er $n : m$ davon, welches wie erst erwiesen worden, eben so viel, als ob es mit $(m + n) : m$ multiplicirt würde $=$
$x(m + n)^2 : m^2 - c(m + n)^2 : m^2 - c(m + n) : m$, wird wieder c ausgegeben, so ists
$x(m + n)^2 : m^2 - c(m + n)^2 : m^2 - c(m + n) : m - c$
wird $n : m$ davon wieder hinzu gethan, oder, wie erwiesen worden, mit $(m + n) : m$ multiplicirt, so ists $x(m + n)^3 : m^3 - c(m + n)^3 : m^3 - c(m + n)^2 : m^2 - c(m + n) : m$
woraus erhellet, daß endlich in den Jahren r sey
$x(m + n)^r : m^r - c(m + n)^r : m^r - c(m + n)^{r-1} : m^{r-1} - c(m + n)^{r-2} m^{r-2}$ &c. $- c(m + n) : m = px$

$x(m + n)^r : m^r - px = c(m + n)^r : m^r + (m + n)^{r-1} : m^{r-1} + (m + n)^{r-2} : m^{r-2}$ &c. $(m + n) : m)$

wird

wird dieſe Progreſſion ſummirt (§. 193.) ſo iſt ſie

$$\frac{((m+n)^{r+1} - (m+n)m^r) : n}{m^r+1} =$$

$$\frac{(m+n)^{r+1} - (m+n)m^r}{nm^r} =$$

$$\frac{(m+n)((m+n) - m^r)}{mn^r} \text{ folglich}$$

$$\frac{c((m+n)(m+n)^r - m^r)}{nm^r} = x\frac{(m+n)^r}{m^r} - px$$

$$\frac{c((m+n)((m+n)^r - m^r))}{c((m+n)((m+n)^r - m^r))} = nx(m+n)^r - nm^r px$$

$$n((m+n)^r - pm^r) = x.$$

Der 1. Zuſatz.

§. 246. Wäre $p=1$, das iſt, er hätte nach Verlauf dieſer Jahre noch gerad ſo viel als von Anfang, ſo wäre

$$\frac{c(m+n)((m+n)^r - m^r)}{n((m+n)^r - m^r)} = x$$

$$\frac{c(m+n)}{n} = x$$

Weil nun hier r weggehet, ſo erhellet, daß er nach Verfluß eines jeden Jahrs eben ſo viel haben werde als er Anfangs gehabt.

Der 2. Zuſatz.

§. 247. Wäre $p=0$, ſo würde nach den Jahren r das Capital verzehrt, und vorige Aequation würde

$$\frac{c(m+n)((m+n)^r - m^r)}{n((m+n)^r - om^r)} = x$$

$$\frac{c((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^{r-1}} = x$$

Der 3. Zusatz.

§. 248. Oben §. 240. ist auch eine Formel gefunden worden, wie gros das Capital seyn müsse, so in gewisser Zeit bey gewissen Ausgaben aufgehe; allein solches setzt zum voraus, die Ausgabe werde erst mit Ende jeden Jahrs bestritten, diese aber gleich bey dem Anfang des Jahrs.

Der 4. Zusatz.

§. 249. Die Formel §. 240. war

$$\frac{cm((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^r}$$

diese ist

$$\frac{c((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^{r-1}}$$

also verhalten sie sich zu einander wie $\frac{m}{m+n} : 1$ oder $m : m+n$ also wird das Capital, davon man erst die Ausgab mit Ende des Jahrs bestreitet, kleiner seyn, als das, davon man gleich im Anfang ausgibt.

Die 82. Ausgabe.

§. 250 Es hat einer ein Capital, damit er jährlich so viel erwirbt, daß er allzeit mit Schluß des Jahre etlichmal, z. E. zweymal, dreymal ꝛc. so viel bekomt, als er im Anfang desselben gehabt; gibt

gibt aber mit Schluß des ersten Jahrs eine gewisse Summe aus, im zweyten Jahr zweymal so viel, im dritten dreymal so viel, ꝛc. Nach gewissen Jahren zehret er sich auf, wie gros war sein Capital?

Auflösung.

Das Capital sey $= x$
wie vielmal er sein Geld vermehrt $= m$
die Anzahl der Jahre $= n$
gibt das erste Jahr aus $= a$

So hat er mit Schluß des

1. Jahrs $mx - a$
2. $m^2x - ma - 2a$
3. $m^3x - m^2a - 2ma - 3a$
4. $m^4x - m^3a - 2m^2a - 3ma - 4a$
5. $m^5x - m^4a - 2m^3a - 3m^2a - 4ma - 5a$

u. s. w.

Hieraus erhellet, daß der Exponent von m, wo es mit x multiplicirt ist, sey $= n$, und wo eben dieses m mit a multiplicirt ist, sey dessen Exponent im ersten Glied $= n-1$, und in den folgenden Gliedern immer um 1 weniger werde, das letzte Glied aber sey $= na = nam^0$. Es ist also

$$m^n x - am^{n-1} - 2am^{n-2} - 3am^{n-3} \text{ ꝛc.} - nam^0 = 0$$

$$\frac{m^n x}{a} = m^{n-1} + 2m^{n-2} + 3m^{n-3} \text{ ꝛc.} + nm^0$$

Hier ist eine geometrische Progression, die aus anderen Progressionen zusammen gesetzt ist. Wir wollen sie zerlegen, und um der Deutlichkeit willen, indessen $n = 5$ gelten lassen, so ist

$$\frac{m^5 x = m^4 + m^3 + m^2 + m^1 + m^0}{a}$$
$$m^3 + m^2 + m^1 + m^0$$
$$m^2 + m^1 + m^0$$
$$m^1 + m^0$$
$$+ m^0$$

Hieraus ist klar, daß eben so viel Progressionen heraus kommen, als Jahre gegeben sind, bey deren jeden das letzte Glied $m^0 = 1$ (§. 60.) und immer eine ein Glied weniger hat, als die vorhergehende, bis die letzte nur das eine Glied $m^0 = 1$ hat. Wir wollen sie summiren (§ 193.)

$$\frac{m^n - 1 \quad m^{n-1} - 1 \quad m^{n-2} - 1 \quad \text{ꝛc.} + m^2 - 1}{m - 1 \quad m - 1 \quad m - 1 \quad m - 1} + 1;$$

folglich ist

$$\frac{m^n x = (m - 1 + m^{n-1} - 1 + m^{n-2} - 1 \text{ ꝛc.} + m^2 - 1 + 1)}{a \qquad\qquad m - 1}$$

So viel es Progressionen gegeben, so vielmal ist auch — 1 in dieser Aequation, ausser, daß die letzte m^0 nicht mit summiret worden, daher ist das — 1 so vielmal zu nehmen, als n — 1: dahero ist

$$\frac{m^n x = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} + \text{ꝛc.} + m^2 - n + 1}{a \qquad\qquad m - 1} + 1$$

$$(m - 1)\frac{m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc.} + m^2 - n + 1$$
$$(+ m - 1$$
$$(m - 1)\frac{m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc.} + m^2 + m - n$$

$$(m - 1)\frac{m^n x + n}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc.} + m^2 + m$$

Wird auch diese Progression summiret (§. 193.) so ist

(m —

$$\frac{(m-1)m^n x + n}{a} = \frac{m^{n+1} - m}{m-1}$$

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^{n+1} + 1 - m - n}{(m-1)^2} \quad \frac{}{m-1}$$

$$= \frac{m^{n+1}}{(m-1)^2} - \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{m}{m^n(m-1)^2} - \frac{n}{m^n(m-1)}$$

$$x = \frac{a}{(m-1)^2}\left(m - \frac{m+n^n(m-1)}{m^n}\right)$$

Es sey $a = 8$, $m = 2$, $n = 3$, so ist $x = \frac{8}{(2-1)^2}\left(2 - \frac{(2+3(2-1))}{2^3}\right) = 8\left(2 - \frac{2+3}{8}\right) =$

$8\left(2 - \frac{5}{8}\right) = 16 - 5 = 11.$

Die 83. Aufgabe.

§. 251. Es legt einer verschiedene Jahre nach einander ein Capital an, und schlägt allemal die Zinß zum Capital. Wie viel wird er haben nach gewissen Jahren?

Auflösung.

Das Capital sey $= a$, der Zinß $= \frac{n}{m}$, die Jahre $= r$, so wird er haben nach §. 243.

$a(m+n)$

$$\frac{a(m+n)^r}{m^r} + \frac{a(m+n)^{r-1}}{m^{r-1}} + \frac{a(m+n)^{r-2}}{m^{r-2}} \text{ ꝛc. } + a$$

die Summe dieſer Progreſſion iſt (§. 193.)

$$\frac{(a(m+n)^r}{m^r+1} + 1 - a) : \frac{n}{m} = \frac{a(m+n)^r}{nm^r} + 1 - \frac{am}{n}$$

Die 1. Anmerkung.

§. 252. Die Formeln, in welchen Dignitäten vorkommen, ſind, beſonders wenn ſie von hohem Grad ſind, ungemein beſchwerlich in Zahlen zu rechnen, wegen dem vielen Multipliciren. Nun kommen uns zwar die Logarithmi zu ſtatten, allein in Formeln, darinnen addirte und ſubtrahirte Gröſſen vorkommen, laſſen ſie ſich nicht wohl anwenden, als §. 237. in der Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$ kan man wohl den Logarithmum von $v(m+n)^r = Lv + rL(m+n)$ haben, aber nicht von $(m+n)^r - m^r$; denn er kan nicht $rL(m+n) - rLm$ ſeyn, weil die Subtraction der Logarithmen eine vorhin geweſene Diviſion anzeiget. (§. 209.) Wir wollen aber der Sache ſo helfen, daß wir mit Zuſetzung des Buchſtabens N, welcher anzeiget, daß die Zahl verſtanden werde, deren Logarithmus da iſt, (§. 212.) die Sache erleichtern. Als vorſtehende Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$ gibt folgende: $\frac{N(Lv + rL(m+n))}{NrL(m+n) - NrLm}$, welche ſo viel heißt, 1) man ſolle zu dem Logarithmus von v den von $m+n$, mit r multipli-

Digitized by Google

tipliciert, addiren, und die dazu gehörige Zahl nehmen, 2) eben so von der Zahl, die zu dem Logarithmo $r\ L(n+n)$ gehört, die, so zu dem Logarithmo $r\ Ln$ gehört, abziehen, und 3) die letztere Differenz in die erstere Summe dividiren. Nun wird es leicht seyn, die Formeln §. 221. 222. 226. 227. 230. 240. 241. mit N und L zu erleichtern.

Die 2. Anmerkung.

§. 253. Mehrentheils kommen Logarithmi heraus, die eine so grosse Kennzahl oder Characteristicam haben, dergleichen in den Tabellen nicht zu finden; als §. 240. soll der Logarithmus von 21 bis 9 multiplicirt werden, gibt 11.8999737. Nun könnten wir wohl als bekannt zum voraus setzen, wie die Zahl, so zu diesem Logarithmo gehöret, zu finden; weilen es aber einem Anfänger so geläufig nicht seyn mögte, so wollen wir kürzlich zeigen, wie damit umzugehen. Wäre der Logarithmus 3.8999737. denn so hoch oder bis auf die Kennzahl 3 findet man ihn in den gemeinen Tabellen, und würde der Logarithmus 8.0000000 addirt, so käme der Logarithmus 11.8999737 heraus; nun aber ist die Zahl zu dem Logarithmo 8.0000000 gehörig 100000000, darum wäre die Zahl, die zu dem Logarithmo 3.8999737 gehört, mit 100000000 zu multipliciren. Nun aber findet man diesen Logarithmum nicht, sondern 3.8999299 und 3.8999846, zu jenem gehört 7942, zu diesem gehört 7943 wird zu jedem Logarithmo characteristica 8 addirt, so werden die Zahlen mit 100000000 multiplicirt, daß jene 794200000000, diese aber 794300000000 wird. Ziehet man derowegen 11.8999299 von 11.8999846 ab, so beträgt der Unterschied des Logarithmi (=54) in der Zahl 100000000, der Unterschied aber von 11.8999737 und 11.8999299 aber ist 438, daher spricht man nach der Regel de Tri:

547

547 gibt 10000000, was gibt 438? gibt 80073126, welches zu 7942000000000 addirt, die zu dem Logarithmo 11. 8999737 gehörige Zahl gibt. Und auf diese Art werden alle dergleichen Logarithmi behandelt.

Die 11. Erklärung.

§. 254. Wenn etliche Glieder einer arithmetischen Progression, die von 1 anfängt, addirt werden, so nennt man solche Summe eine Polygonalzahl.

Die 12. Erklärung.

255. Ist die Differenz der Glieder einer solchen Progression 1. so heißt es eine Trigonalzahl; ist sie 2, eine Quadratzahl; ist sie 3, eine Pentagonalzahl, u. s. w.

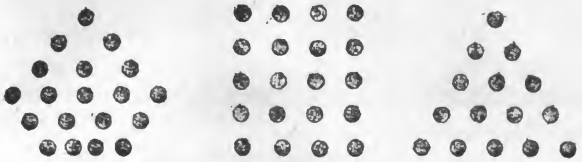
Anmerkung.

§. 256. Es sind demnach

Arithm. Progr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Trigonal-Zahl.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.
Arithm. Progr.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.
Quadrat-Zahl.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Arithm. Progr.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.	25.
Pentagonal-Zahl	1.	5.	12.	12.	35.	51.	70.	92.	117. &c.

Sie haben aber den Namen von den regulären Vielecken, in welche sich die Zahlen, wenn ihre Einheiten als Puncten oder Kugeln angesehen werden, versetzen lassen, daß auf eine Seite so viel Puncten kommen, als Glieder in einer Progression summiret worden, als:

Digitized by Google



Der 1. Zusatz.

§. 256. Hieraus ist klar, daß der zu summirenden Progression Differenz allezeit um 2 weniger seye, als die daher entstehende Figur Winkel hat, wenn also die Winkelzahl $= n$, so ist die Differenz $= n - 2$.

Der 2. Zusatz.

§ 357. Eben so klar ist auch, daß, so viele Glieder summiret worden, so viel kommen auch Puncten auf eine Seite der Figur.

Der 3. Zusatz.

§. 258. Um deswillen kann die Zahl der summirenden Glieder gar füglich die Seitenzahl, und die um 2 vermehrte Differenz der Glieder die Winkelzahl genennet werden.

Die 83. Aufgabe.

§. 259. Aus der gegebenen Seiten- und Winkelzahl die Polygonalzahl selbst zu finden.

Auflösung.

Die Seitenzahl seye $= a$ der Zahl der Glieder (§. 257.)

die

die Winkelzahl $= n$, so ist die Differenz $= n - 2$ (§. 256.)
daher das letzte Glied $((a-1)(n-2))+1$ (§. 184.)
das erste Glied $= 1$
Summe des ersten u. letzten Glieds $= (a-1)(n-2)+2$
halbe Zahl der Glieder $= \frac{1}{2}a$
Polygonalzahl $= x = \frac{1}{2}a((a-1)(n-2)+2)$

$$= \frac{a^2n - an - a^2 + 2a}{2}$$

$$= \frac{(n-2)a^2 - (n-4)a}{2}$$

Es sey $a = 8, n = 5$, so ist $x = ((5-2)64 - (5-4)8) : 2 = (3.64 - 1.8.) : 2 = (192 - 8) : 2 = 184 : 2 = 92$.

Der 1. Zusatz.

§. 260. Es ist demnach die

Trigonalzahl $= \frac{a^2+a}{2}$

Quadratzahl $= \frac{2a^2+0}{2} = a^2$

Pentag. Z. $= \frac{3a^2-a}{2}$

Hexagon. Z. $= \frac{4a^2-2a}{2} = 2a^2 - a = a(2a-1)$

Heptagon. Z. $= \frac{5a^2-3a}{2}$ ꝛc.

Woraus die Regel, nach welcher die Polygonalzahlen gefunden werden, von selbsten in die Augen fället.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 261. Man setze die Seitenzahl $= x$, die Polygonalzahl $= p$, so ist (§. 258.)

$$p = \frac{(n-2)x^2 - (n-4)x}{2}$$

$$2p = x^2(n-2) - (n-4)x$$

$$\frac{2p}{n-2} = x^2 - \frac{(n-4)x}{n-2}$$

Es sey $\frac{n-4}{n-2} = m$, so ist

$$\frac{n-4}{2n-4} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16} = \frac{m^2}{4}$$ dahero

$$\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16} = x^2 - mx + \frac{m^2}{4}$$

$$\sqrt{\left|\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}\right|} = x - \frac{m}{2}$$

$$\frac{n-4}{2n-4} + \sqrt{\left|\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}\right|} = x$$

Werden die Brüche unter dem Wurzelzeichen zu einerley Benennung gebracht, weñ nämlich $\frac{2p}{n-2}$ mit $4n-8$ multiplicirt wird, so komt $\sqrt{\frac{8np-16p+n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}}$

$$= \frac{\sqrt{8p(n-2)+(n-4)^2}}{2n-4} \text{ folglich}$$

$$\frac{n-4+\sqrt{8p(n-2)+(n-4)^2}}{2n-4} = x$$

Der 3. Zusatz.

§. 262. Daher ist

die Seite der Trigon. $Z. = \frac{-1+\sqrt{8p+1}}{2}$

der Quadr. $Z. = \frac{0+\sqrt{16p+0}}{4} = \sqrt{p}$

der Pentag. $Z. = \frac{1+\sqrt{24p+1}}{6}$

der Herag. $Z. = \frac{2+\sqrt{32p+4}}{8}$

der Heptag. $Z. = \frac{3+\sqrt{40p+9}}{10}$

wel-

welches so wol die Art die Seite zu finden, deutlich vor Augen leget, als auch zeiget, wie zu finden, ob eine gegebene Zahl unter die Polygonalzahlen gehöre oder nicht, wann sie nemlich in denen Formeln nach und nach in die Stelle des p gesetzt wird, und sodann Quadratwurzeln ausgezogen werden können.

Der 4. Zusatz.

§ 263. Es sey die Winkelzahl $= x$, so ist

$$p = \frac{a}{2}((a-1)(x-2)+2) \text{ §. 259.}$$

$$\frac{2p}{a} = (a-1)(x-2)+2$$

$$\frac{2p}{a} - 2 = (a-1))x-2)$$

$$\frac{2p}{a(a-1)} - \frac{2}{a-1} = x-2$$

$$\frac{2p}{a(a-1)} - \frac{2}{a-1} + 2 = x$$

$$\frac{2(p-a)}{a(a-1)} + 2 = x$$

Es sey $p = 148$, $a = 8$, so ist $x = \frac{2(148-8)}{8(8-1)} + 2$

$$= \frac{2.140}{8.7} + 2 = \frac{280}{56} + 2 = 5 + 2 = 7.$$

Die 13. Erklärung.

§. 264. Wenn ein Punct von 3. 4. 5. 6. ꝛc. Puncten in Gestalt eines regulairen Vieleckes umgeben wird, und dieses Vieleck wieder von einem andern u. s. w. daß immer des äusseren Seite einen Punct mehr habe als des inneren: so wird die Zahl solcher Puncten eine volle Polygonalzahl oder eine Polygonalzahl mit dem Centro genennet. Und zwar insbesondere eine Trigonalzahl, wenn 3; eine Quadratzahl, wenn 4 ꝛc. Puncten das Centrum umgeben.

Die 1. Anmerkung.

§. 265. Die Ursache dieser Benennung ist aus nachstehenden Figuren abzunehmen.

Die 2. Anmerkung.

§. 266. Wenn diese Puncten so wol bey den vollen als gemeinen Polygonalzahlen Kugeln von gleichem Diameter sind, die einander berühren: so werden sie nirgends accurat auf einander passen, als bey denen gemeinen Polygonalzahlen in der Trigonal- und Quadratzahl; bey den vollen aber nur in den Hexagonal- und Quadratzahlen, weilen die

die Diametri der zusammenstossenden Kugeln sonst nirgends gleichseitige Triangel, Quadrate oder regulaire Sechsecke ausmachen, als welche Figuren allein in einer ebenen Fläche auf einander passen, welches in der Geometrie erwiesen wird. Es zeiget dieses auch der blosse Augenschein.

Der 1. Zusatz.

§. 267. Wenn in der vollen Polygonalzahl das Centrum nicht mit gezehlet wird, so enthält die erste Einfassung so viel Puncten, als die Figur Seiten hat, davon die Zahl den Namen hat, die andere Reihe doppelt, die dritte dreymal so viel ꝛc. Daher ist diese Polygonalzahl eine arithmetische Progression, deren erstes Glied die Winkelzahl ist und die Differenz ebenfalls die Winkelzahl.

Der 2. Zusatz.

§. 268. Auf der Seite des ersten Vielecks von diesen Polygonalzahlen sind 2 Puncten, auf der zweyten 3, ꝛc. dahero ist die Seitenzahl jederzeit um 1 mehr als die Zahl der Glieder, wenn daher die Seitenzahl $= n$, so ist die Zahl der Glieder von der Progression $= n - 1$.

Der 3. Zusatz.

§. 269. Wenn man also diese Progression (§. 267. 268.) summiret und 1 addiret, hat man die volle Polygonalzahl.

Die 84. Aufgabe.

§. 270. Aus der gegebenen Zahl der Winkel und Seite die Polygonalzahl mit dem Centro zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Winkel a
Die Zahl der Seite $= n$
So ist das erste Glied $= a$
Die Differenz $= a$ (§ 267.)
Die Zahl der Glieder $= n - 1$ (§. 268.)
Das letzte Glied $= (n-2)a + a = na - a$
Summe des ersten und letzten $= na$
Summe der Progression $= \frac{na(n-1)}{2}$ (§. 185.)

folglich
Die Polygonalzahl $x = \frac{na(n-1)}{2} + 1$ (§. 269.)

Der 1. Zusatz.

§. 271. Hieraus folgt, daß sey
Trigonalzahl $= \frac{3(n-1)n}{2} + 1$

Quadratzahl $= \frac{4(n-1)n}{2} + 1 = 2(n-1)n + 1$

Pentagonalzahl $= \frac{5(n-1)n}{2} + 1$

Hexagonalzahl $= \frac{6(n-1)n}{2} + 1$ ꝛc.

Der 2. Zusatz.

§. 272. Man setze die Polygonalzahl $= p$, die Winkelzahl $= x$, so ist

$p =$

Digitized by Google

$$p = \frac{xn(n-1)}{2} + 1$$

$$2p = xn(n-1) + 2$$

$$2p - 2 = xn(n-1)$$

$$\frac{2(p-2)}{n(n-1)} = x$$

Der 3. Zusatz.

§. 273. Man setze $n = x$, so ist

$$p = \frac{ax(x-1)}{2} + 1$$

$$p - 1 = \frac{ax(x-1)}{2}$$

$$\frac{2(p-1)}{a} = x^2 - x$$

$$\frac{2(p-1)}{a} + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{2(p-1)}{a} + \frac{1}{4}} = x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(p-1)}{a} : a + \frac{1}{4}} = x$$

Der 4. Zusatz.

§. 274. Weil die Formel $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2p-2}{a} + \frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8p-8}{4a} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-8}{a} + a}$; so ist die

Seite der

Trig. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-5}{3}}$

Quad. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-4}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2p-1}$

Pentag. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-3}{5}}$

Herag. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-2}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p-1}{3}}$

Heptagon. $Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-1}{7}}$

Octog. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-0}{8}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p}$

Enneag. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p+1}{9}}$

Decag. $Z. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p+2}{10}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p+1}{5}}$

Der 5. Zuſatz.

§. 275. Wenn man demnach von einer Zahl wiſſen will, ob ſie eine von denen Polygonahlen ſey: ſo darf man ſie nur nach und nach in denen Formeln (§ 274) in die Stelle des p ſetzen, und ſehen, ob ſich die Wurzel ausziehen laſſe. Kan es geſchehen, ſo gehöret ſie darunter; wo aber nicht, iſt ſie auch keine Polygonal-

nalzahl. Z. E. 61. in der Trigonalformel, da unter dem Wurzelzeichen stehet $\frac{8p-5}{3}$, so käme $\frac{8.61-5}{3}$ $= \frac{483}{3} = 161$, welche Zahl irrational; wird aber 61 in die Hexagonalformel gesetzt, so ist $\frac{4.61-1}{3} = \frac{243}{3} = 81$, welches rational ist. Daher ist 61 zwar keine Trigonal- wohl aber eine Hexagonalzahl.

Die 85. Aufgabe.

§. 276. Die Summe von Quadraten, Cubiczahlen, zu finden, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung der Zahlen fortgehen.

Auflösung.

Es sey diejenige Zahl, wie weit von eins an die Summirung geschehen solle $= n$

Die verlangte Summe von diesen Zahlen werde angezeigt mit Vorsetzung des Buchstabens $\int$.

So ist $\int n^0$ die Summe von so viel Einsern, als n anzeiget, weil $n^0 = 1$ (§. 60.)

Sn^1 ist die Summe von den natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung fortgezehlet bis auf n.

Sn^2 ist die Summe von den Quadraten, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung fortgehen.

Sn^3 die Summe von Cubiczahlen, deren Wurzeln auch in natürlicher Ordnung bis auf n fortgehen. Und so weiter Sn^4, Sn^5, Sn^6, ꝛc.

Als es sey $n=5$, so wäre

$Sn^0 = 1+1+1+1+1 = 5$
$Sn^1 = 1+2+3+4+5 = 15$
$Sn^2 = 1+4+9+16+25 = 55$
$Sn^3 = 1+8+27+64+125 = 225$

Man nehme eine Zahl weiter als n, so ist sie $n+1$, und die Summen werden seyn, wie vorhin $\int(n+1)^0$, $\int(n+1)^1$, $\int(n+1)^2$, $\int(n+1)^3$, $\int(n+1)^4$ ꝛc. Wenn man daher die ersteren Summen abziehet, so bleiben jederzeit die letzten Glieder von den letzten Reihen übrig, als: $\int(n+1)^0 - \int n^0 = n^0$, $\int(n+1)^1 - \int n^1 = (n+1)^1$, $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$, $S(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ ꝛc. als wenn $n=5$, so ist $(n+1)=6$, und z. E. $S(n+1)^2 = 1+4+9+16+25+36$, $Sn^2 = 1+4+9+16+25$

$S(n+1)^2 - \int n^2 = 36 = (n+1)^2$

Nun findet man im 187. §. wenn $a=1=d$ gesetzt wird, die Summe der ersten n natürliche Zahlen oder $\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Diese Summe ist durch die erste und zweyte Potenz von n gegeben, jede mit einem Coefficienten multiplicirt, der einerley bleibt, n mag sich ändern, wie es will; es ist nemlich auf eben die Art $\int(n+1) = \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{1}{2}\cdot(n+1)$

Weil nun hier die Summe der ersten Potenzen das Quadrat von n enthält: so kann man wenigstens als eine Muthmassung ansehen, die Summe der Quadraten werde den Würfel von n enthalten, und etwa folgende Gestalt haben:

Sn^2

$$Sn^2 = An^3 + B.n^2 + C.n$$

wo A, B, C Coefficienten bedeuten, die, wie die vorigen $\frac{1}{2}$, einerley bleiben müssen, wenn sich gleich n änderte. Es wäre nemlich auf eben die Art:

$$S(n+1)^2 = A(n+1)^3 + B.(n+1)^2 + C.(n+1)$$

Ob nun diese Muthmassung richtig ist oder nicht, liesse sich prüfen, wenn man die Coefficienten etwa bestimmen könnte. Das mögte folgendergestalt angehen: Wenn man $(n+1)^3$, $(n+1)^2$, $n+1$ wirklich berechnet und einzeln mit den Coefficienten multiplicirt, so ist

$$\begin{array}{lllll} A\,(n+1)^3 = & An^3 & +3\,An^2 & +3\,An & +A \\ B.(n+1)^2 = & & +\;Bn^2 & +2\,Bn & +B \\ C.(n+1) = & & & +\,Cn & +C \end{array}$$

Dieses zusammen ist, vermöge der Voraussetzung, $\int(n+1)^2$. Man ziehe davon ab

$$Sn^2 = \qquad An^3 + Bn^2 + Cn$$

so bleibt

$$\int(n+1)^2 - \int n^2 = 3An^2 + 3An + A$$
$$+2Bn + B$$
$$+C$$

Nun ist aber $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

folalich

$$n^2 + 2n + 1 = 3An^2 \left.\begin{array}{l} +3A \\ +2B \end{array}\right\} n \begin{array}{l} +A \\ +B \\ +C \end{array}$$

Hier muß das einerley seyn, was auf beyden Seiten in einerley Potenz von n multiplicirt ist, also ist

I) $1 = 3A$; $A = \frac{1}{3}$; II) $2 = 3A + 2B = 1 + 2B$; oder $1 = 2B$; $B = \frac{1}{2}$; III) $1 = A + B + C = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = \frac{5}{6} + C$ oder $\frac{1}{6} = C$

daher $\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

wenn $n = 5$; so ist $\int n^2 = \frac{125}{3} + \frac{25}{2} + \frac{5}{6}$
$= 41\frac{2}{3} + 12\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 53 + \frac{12}{6} = 55$

Nach

Nach diesen beyden Beyspielen der Summen der ersten und zweyten Potenzen wird man also wohl für die Summe der Würfel, folgende Formel muthmassen.

$$Sn^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn \text{ daher}$$
$$S(n+1)^3 = A.(n+1)^4 + B.(n+1)^3 + C(n+1)^2 + D(n+1)$$
$$S(n+1)^3 = An^4 + 4An^3 + 6An^2 + 4An + A$$
$$+ Bn^3 + 3Bn^2 + 3Bn + B$$
$$+ Cn^2 + 2Cn + C$$
$$+ Dn + D$$

Weil nun $f(n+1)^3 - fn^3 = (n+1)^3$ so ist dieser Würfel wirklich berechnet.

$$n^3+3n^2+3n+1 = 4An^3 + \left.\begin{matrix}6A\\+3B\end{matrix}\right) n^2 + \left.\begin{matrix}4A\\+3B\\+2C\end{matrix}\right\} n + \begin{matrix}A\\+B\\+C\\+D\end{matrix}$$

daher nach eben der Art zu schliessen, wie bey den Quadraten:

I) $1 = 4A$; $A = \frac{1}{4}$; II) $3 = 6A + 3B = \frac{6}{4} + 3B = \frac{3}{2} + 3B$
oder $1 = \frac{1}{2} + B$; $B = \frac{1}{2}$; III) $3 = 4A + 3B + 2C = 1 + \frac{3}{2} + 2C$
oder $\frac{1}{2} = 2C$; $C = \frac{1}{4}$; IIII) $1 = A + B + C + D$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + D = 1 + D$ also $D = 0$ und
$fn^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

Für $n = 5$ ist diese Summe:

$$\frac{625}{4} + \frac{125}{2} + \frac{25}{4} = \frac{650}{4} + \frac{125}{3} = 162\frac{1}{2} + 62\frac{1}{4} = 225.$$

Der 2. Zusatz.

§. 277. Diese Summen lassen sich also dergestalt angeben:

Sn^0 .

$Sn^0 = n$
$Sn^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n.(n+1)$
$Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n.(n+1).(2n+1)$
$Sn^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2.(n+1)^2$

So kann man Formeln für die Summen höherer Potenzen finden; jede Formel enthält die Potenzen von n auf einen Grad höher, als die Potenzen steigen, die man summirt.

Der 2. Zusatz.

§. 278. Wenn 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4 ꝛc. multiplicirt wird: so kann solche Reihe Zahlen nach dieser Art summirt werden.

1. 2	= 2	= 1. (1+1)	= 1+1
2. 3	= 6	= 2. (2+1)	= 4+2
3. 4	= 12	= 3. (3+1)	= 9+3
4. 5	= 20	= 4. (4+1)	= 16+4
5. 6	= 30	= 5. (5+1)	= 25+5
6. 7	= 42	= 6. (6+1)	= 36+6
7. 8	= 56 ꝛc.	= 7. (7+1)	= 49+7 ꝛc.
	168		

Nennt man nun die letzte n: so ist ihre Summe (§. 276.) $= Sn^2 + Sn^1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§ 277.) $= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{1}{3}n(n+2)(n+1)$. Es sey $n = 7$, so ist die Summe $= \frac{7}{3}(7+2)(7+1) = \frac{7}{3}.72 = 168$.

Die 14. Erklärung.

§. 279. Pyramidalzahlen sind, die entstehen wenn die auf einander folgende Polygonalzahlen summirt werden.

Der

Digitized by Google

Der 1. Zusatz.

§. 280. Sie entstehen also aus den Polygonalzahlen, wie diese aus den arithmetischen Progreßionen. Als nach §. 255. waren

Trigonalzahlen	1.	3.	6.	10.	15.	21.
Pyramidalzahlen	1.	4.	10.	20.	35.	56.
Quadratzahlen	1.	4.	9.	16.	25.	36.
Pyramidalzahlen	1.	5.	14.	30.	55.	91. ꝛc.

Der 2. Zusatz.

§. 281. Um deswillen werden die Pyramidalzahlen auch eingetheilt in Trigonal- Quadrat- Pentagonal- ꝛc. Pyramidalzahlen.

Der 3. Zusatz.

§. 282. Wenn also die Polygonalzahlen nach §. 276. summirt werden, so hat man die Pyramidalzahlen gefunden.

Anmerkung.

§. 283. Man wird sich leicht vorstellen können, woher die Pyramidalzahlen ihren Namen haben; denn wenn über einem Vieleck, in welchem die Polygonalzahlen versetzt worden, (§. 256. 265.) ein anderes gesetzt wird, dessen Seite um 1 weniger, und so weiter bis zu oberst 1 komt, so stellen diese Puncten eine Pyramide vor. Man pflegt die Stuckkugeln in denen Zeughäusern so aufeinander zu setzen. Wir werden also hieraus lernen, wie leicht zu berechnen sey, wie viel Kugeln in einem solchen Haufen seyen. Man wird aber leicht begreiffen, daß dergleichen Pyramiden von Kugeln nicht können aufgesetzt werden, wo die Kugeln in den Polygonalzahlen nicht auf einander passen. (§. 266.)

Der

Der 4. Zusatz.

§. 284. Weilen es gemeine und volle Polygonalzahlen gibt, (§. 254. 264.) so gibt es auch gemeine und volle Pyramidalzahlen.

Die 86. Aufgabe.

§. 285. Aus der gegebenen Seiten und Winkelzahl die gemeine Pyramidalzahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Winkel $= a$
der Seite $= n$
so ist die Polygonalzahl $= \frac{(a-2)n^2-(a-4)n}{2}$ (§. 259.)
Man darf also nur diese Zahl summiren (§. 276. 277.) weilen aber a, als die Zahl der Winkel, unveränderlich, folglich nicht summirt werden kann, so wird nur n summirt

$$\frac{(a-2)\int n^2-(a-4)\int n^1}{2}$$

$= \frac{1}{2}(a-2)\int n^2 - \frac{1}{2}(a-4)\int n^1$
$= \frac{1}{2}(a-2(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n)-\frac{1}{2}(a-4)\frac{1}{2}(n^2+n)$ (§. 277.)
$= \frac{1}{6}an^3+\frac{1}{4}an^2+\frac{1}{12}an-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n-\frac{1}{4}an^2-\frac{1}{4}an+(n^2+n$
$= \frac{1}{6}an^3-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{6}an+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$
$= \frac{an^3-2n^3-an+5n+3n^2}{6}$
$= \frac{(a-2)n^3-(a-5)n+3n^2}{6}$
$= \frac{(a-2)n^3+n(3n-a+5)}{6}$

Der

Der 1. Zusatz.

§. 286. Dahero sind Pyramidalzahlen, und zwar

Trigonal $= \frac{n^3 + n(3n+2)}{6} =$

Quadrat. $= \frac{2n^3 + n(3n+1)}{6}$

Pentag. $= \frac{3n^3 + n(3n+0)}{6} = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2$

Hexagon. $= \frac{4n^3 + n(3n-1)}{6}$

Heptagon. $= \frac{5n^3 + n(3n-2)}{6}$

Octogon. $= \frac{6n^3 + n(3n-3)}{6} = n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ ꝛc.

Der 2. Zusatz.

§. 287. Hieraus lassen sich dann Generalregeln für alle Pyramidalzahlen formiren.

1.) Die Cubiczahl der Seiten wird mit der Winkelzahl weniger zwey multiplicirt.

2.) Die Differenz zwischen der Winkelzahl und 5 wird, wenn es unter 5 Seiten zu der dreyfachen Seitenzahl addirt, sonst von ihr subtrahirt, und dieses mit der Seitenzahl multiplicirt.

3.) Die-

3.) Diese beyde Producte addirt, und mit 6 dividirt. Die unterste Seite eines viereckigt auf einander gesetzten zugespitzten Haufen Stuckkugeln seyn 10 Kugeln, so ist

1.) 1000
2
2000

2.) 5
4 addirt zu 30
1 1
31
10
310

3.) 2000
310
2310

6, 385 Kugeln in dem ganzen Haufen.

Der 2. Zusatz.

§. 288. Man setze die Pyramidalzahl $= p$ und Winkelzahl $= x$, so ist (§. 285)

$$p = \frac{xn^3 - 2n^3 - xn + 5n + 3n^2}{6}$$

$$6p = xn^3 - 2n^3 - xn + 5n + 3n^2$$

$$6p + 2n^3 - 3n^2 - 5n = xn^3 - xn$$

$$\frac{6p + 2n^3 - 3n^2 - 5n = x}{n^3 - n}$$

$$\frac{(6p : n) + 2n^2 - 3n - 5 = x}{n^2 - 1}$$

Der 4. Zusatz.

§. 289. Will man, wenn alles bekannt, die Seitenzahl finden, so setze man $x=n$, so ist (§ 285.)

$$\frac{6p=(a-2)x^3+3x^2-(a-5)x}{\frac{6p}{a-2}=x^3+\frac{3}{a-2}x^2-\frac{(a-5)x}{a-2}}$$

$$x^3+\frac{3}{a-2}x^2-\frac{(a-5)x}{a-2}-\frac{6p}{a-2}=0$$

Da aber dieses eine unreine cubische Gleichung ist, welche aufzulösen wir die benöthigte Gründe noch nicht gelegt, müssen wir die Auflösung noch anstehen lassen. Es ist aber um deswillen angeführt worden, um denen Anfängern eine Begierde zu den höheren Aequationen zu erregen.

Die 87. Aufgabe.

§. 290. Aus der gegebenen Seiten- und Winkelzahl eine volle Pyramidalzahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seitenzahl $=n$

die Winkelzahl $=a$

so ist die Polygonalzahl $=\frac{1}{2}an(n-1)+1$ (§. 270.)

$$=\frac{an^2-an+2}{2}$$

dahero ist die Pyramidalzahl (§. 276. 282.)

$=\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2}afn^2 - \frac{1}{2}afn^1 + fn^0$
$\frac{1}{2}a(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) - \frac{1}{2}a(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n) + n$ (§. 277.)
$= \frac{1}{6}an^3 + \frac{1}{4}an^2 + \frac{1}{12}an$
$- \frac{1}{4}an^2 - \frac{1}{4}an$
$+ n$

$\frac{1}{6}an^3 - \frac{1}{6}an + n = \frac{1}{6}a(n^3 - n) + n = \frac{1}{6}an(n^2 - 1) + n$

Der 1. Zusatz.

§. 291. Wird diese Generalformel auf die besonderen Fälle applicirt so kommt für die

Trigon. Pyr. Z. $= \frac{3n^3 + n}{6} = \frac{n^3 + n}{2}$

Quadr. P. Z $= \frac{4n^3 + 2n}{6} = \frac{2n^3 + n}{3}$

Pentag. P. Z. $= \frac{5n^3 + n}{6}$

Herag. P. Z. $= \frac{6n^3 + 0n}{6} = n^3$

Heptag. P. Z. $= \frac{7n^3 - n}{6}$

Octog. P. Z. $= \frac{8n^3 - 2n}{6} = \frac{4n^3 - n}{3}$ u. s. w.

Der 2. Zusatz.

§. 292. Hieraus folget denn wieder die Generalregel

1.) Die Winkelzahl wird mit dem Cubo der Seitenzahl multiplicirt.

2) Dazu addirt das Product aus der Seitenzahl in

die Differenz von der Winkelzahl und 6, wenn die Seite weniger als 6; ist sie aber mehr, so subtrahirt solches Product.

3.) Was komt mit 6 dividirt.

Die Seite sey = 10 von einer Pentag. Pyram. Z.

so ist 1000		10
5		1
5000	6	10
10	5	
5010	1	
6) 835		

Der 3. Zusatz.

§. 293. Man setze die Pyramidalzahl = p, die Winkelzahl = x, so ist

$$p = \frac{x(n^3 - n) + n}{6}$$

$$6p = x(n^3 - n) + 6n$$

$$6(p - n) = x(n^3 - n)$$

$$\frac{6(p - n)}{n(n^2 - 1)} = x$$

Anmerkung.

§. 294. Was wegen Findung der Seitenzahl (§. 289.) bemerkt worden, gilt auch hier.

Die 88. Aufgabe.

§. 295. Wenn Kugeln in Gestalt eines Rectanguli neben einander gelegt werden, und über die-

Digitized by Google

dieſe wieder eine Schicht; da aber jede Seite des Rectanguli eine Kugel weniger hat, bis ſich dieſer Hauſe mit einer einigen Reihe Kugeln endiget, die Summe dieſer Kugeln zu finden.

Auflöſung.

Es ſey die oberſte Reihe Kugeln $= a$, ſo iſt des nächſt darunter liegenden Rectanguli

eine Seite $= 2$ die andere $= a + 1$
des zweyten $= 3$ - - - $= a + 2$
des dritten $= 4$ - - - $= a + 3$
des vierten $= 5$ - - - $= a + 4$ ꝛc.

dahero iſt der ganze Hauffe

1. $a = a$
2. $(a+1) = 2a+1+1$
3. $(a+2) = 3a+3+2$
4. $(a+3) = 4a+9+3$
5. $(a+4) = 5a+16+4$
6. $(a+5)$ ꝛc. $= 6a+25+5$ ꝛc. (§. 278.)

Hieraus iſt klar, daß die Summe aus drey Progreſſionen beſtehe. Die erſte iſt eine arithmetiſche da das erſte Glied $+ a$, die Differenz $= a$, die Zahl der Glieder, ſo viel als Schichten Kugeln auf einander $= n$; die andere aus den Quadratzahlen von 1 bis auf $n - 1$; die dritte aus den einfachen Zahlen auch bis auf $n - 1$.

die Summe der erſten $= \frac{1}{2}(a+na)n$ (§. 187.)
der andern $= \int(n-1)^2 = \int n^2 - 2\int n^1 + \int(n-1)^0$
der dritten $= \int(n-1)^1 \qquad \int n^1 - \int(n-1)^0$
Summe $= \int n^2 - \int n^1$

$$= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \text{ (§. 277.)}$$
$$\underline{-\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n}$$
$$= \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n$$

dahero ist die ganze Summe:

$$a\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2a + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n = \tfrac{1}{2}an(n+1) + \tfrac{1}{3}n(n^2-1)$$

Es sey die obere Reihe 30, und 10 Schichten, so ist der

$$\text{Hauffe} = \frac{30}{2}\cdot\frac{10}{}(10+1) + \frac{10}{3}(100-1) =$$

$$150.11 + \frac{10}{3}.99 = 1650 + 330 = 1980.$$

Der 1. Zusatz.

§. 296. Wenn $a = 1$, so komt eine Formel heraus für eine Quadrat-Pyramidalzahl.

$$\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + n(3n+1)}{6}$$

wie (§. 286.) auf andere Art erwiesen.

Der 2. Zusatz.

§. 297. Es sey die Summe der Kugeln $= p$, die oberste Reihe $= x$, so ist

$$p = \tfrac{1}{2}xn(n+1) + \tfrac{1}{3}n(n^2-1) \text{ (§. 295.)}$$
$$p - \tfrac{1}{3}n(n^2-1) = \tfrac{1}{2}xn(n+1)$$
$$\frac{p - \tfrac{1}{3}n(n^2-1)}{\tfrac{1}{2}n(n+1)} = x$$

Die

Die 15. Erklärung.

§. 298. Eine Pronikzahl iſt, wenn zum Quadrat die Wurzel addirt wird. Und eine ſolche Wurzel wird Pronikwurzel genennet. als: $9+3=12$ iſt Pronikzahl und 3 Pronikwurzel.

Der 1. Zuſatz.

§. 299. Wenn 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4, ꝛc. multiplicirt wird, (§. 278.), ſo entſtehen pur Pronikzahlen, und ihre Glieder geben eine Pronikprogreſſion der natürlichen Zahlen.

Der 2. Zuſatz.

§. 300. Die Formel $\frac{1}{3}n(n+2)(n+1)$ (§. 278.) lehrt die natürliche Pronikprogreſſion ſummiren. Z. E. die Pronikprogreſſion 2. 6. 12. 20. 30. 42. 56. 72. 90. hat 9 Glieder, iſt alſo die Summe $\frac{9}{3}(9+2)(9+1)=3.11.10=330$.

Die 89. Aufgabe.

§. 301. Aus einer Zahl die Pronikwurzel zu ziehen.

Auflöſung.

Die Pronikzahl ſey $=a$, die Wurzel $=x$, ſo iſt

$$x^2+x=a$$

$$x^2+x+\tfrac{1}{4}=a+\tfrac{1}{4}$$

$$x+\tfrac{1}{2}=\sqrt{a+\tfrac{1}{4}}$$

$$x=\sqrt{a+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}$$

Es sey $a = 2\sigma$, so ist $x = \sqrt{20 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{81}{4}} - \frac{1}{2}$
$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. denn $16 + 4 = 20$

Die 90. Aufgabe.

§. 302. Es sind drey Klumpen, jeder aus Gold, Silber und Kupfer zusammen geschmolzen, in dem ersten ist 2 Loth Gold, 4 Loth Silber und 8 Loth Kupfer, in dem zweyten 3 Loth Gold, 9 Loth Silber und 6 Loth Kupfer, in dem dritten 10 Loth Gold, 5 Loth Silber und 15 Loth Kupfer. Wie viel muß von jedem genommen werden, daß man einen Klumpen bekomme, in welchem 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer seye.

Auflösung.

Von dem ersten soll genommen werden $= x$
Von dem andern $= y$
Von dem dritten $= z$

multiplicirt man nun 2 Loth Gold, 4 Loth Silber und 8 Loth Kupfer mit x desgleichen 3 Loth Gold, 9 Loth Silber und 6 Loth Kupfer mit y, und 10 Loth Gold, 5 Loth Silber und 15 Loth Kupfer mit z, so muß es 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer geben, nemlich

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4x + 8x \\ 3y + 9y + 6y \\ 10z + 5z + 15z \end{array}\right\} = 4 + 6 + 9$$

nemlich das Gold zusammen $2x + 3y + 10z = 4$
das Silber $4x + 9y + 5z = 6$
das Kupfer $8x + 6y + 15z = 9$

$2x +$

$$2x+3y+10z=4$$
$$x=\frac{4-3y-10z}{2}$$

$$4x+9y+5z=6$$
$$x=\frac{0-9y-5z}{4}$$

$$8x+6y+15z=0$$
$$x=\frac{9-6y-15z}{8}$$

$$\frac{4-3y-10z}{2}=\frac{6-9y-5z}{1}$$
$$4)\ 8-6y-20z=0-9y-5z$$
$$3y=15z-2$$
$$y=5z-\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{0-9y-z}{4}=\frac{9-6y-15z}{8}$$
$$8)\ 12-18y-10z=9-6y-15z$$
$$3+5z=12y$$
$$\frac{3+5z}{12}=y$$

$$5z-\tfrac{2}{3}=\frac{3+5z}{12}$$
$$60z-8=3+5z$$
$$55z=11$$
$$z=\tfrac{1}{5}$$

wird der Werth von z in die Equation $y=5z-\frac{2}{3}$ gesetzt, so ist $y=-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

wird

wird der Werth von y und z in die Aequation $x = 4 - 3y - 10z$ gesetzt, so ist

$$x = \frac{4 - 1 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

Probe vom ersten $\frac{1}{2}$ gibt	Gold	1	Silber	2	Kupf.	4
zweyten $\frac{1}{3}$ gibt	-	1	-	3	-	2
dritten $\frac{1}{7}$ gibt	-	2	-	1	-	3
		4	-	6	-	9

Anmerkung.

§. 303. Es gibt sehr viel unmögliche Fälle bey dieser Aufgabe, welches sich alsdenn zeiget, wenn x, y oder z negativ heraus kommen: denn kein Stück Metall kann negativ eingeschmolzen werden. Diese Aufgabe könnte auch allgemein aufgelößt werden; allein wer es versuchen will, wird finden, daß die viele Buchstaben so viel Beschwerlichkeiten machen, daß man lieber bey den Zahlen bleibet.

Die 91. Aufgabe.

§. 304. Es kauft jemand 10 Malter Kernen, 6 Malter Roggen und 4 Malter Gersten für 96 fl. desgleichen 12 Malter Korn, 3 Malter Rocken, 7 Malter Gersten für 105 fl. und 13 Malter Korn, 19 Malter Rocken, 2 Malter Gerste für 160 fl. wie viel galt jedes Malter?

Auflösung.

Das Malter Kernen galt $= x$
Roggen $= y$
Gersten $= z$ so ist

$10x$

$10x+6y+4z=96$, $12x+3y+7z=105$,

$x=\frac{96-6y-4z}{10}$ $x=\frac{105-3y-7z}{12}$

$13x+19y+2z=160$

$x=\frac{160-19y-2z}{13}$

$\frac{96-6y-4z}{10}=\frac{105-3y-7z}{12}$

$1152-72y-48z=1050-30y-70z$

$102+22z=42y$

$\frac{17}{7}+\frac{11z}{21}=y$

ferner $\frac{96-6y-4z}{10}=\frac{160-19y-2z}{13}$

$1248-78y-52z=1600-190y-20z$

$112y=352+32z$

$14y=44+4z$

$y=\frac{22}{7}+\frac{2z}{7}$

$\frac{22}{7}+\frac{2z}{7}=\frac{17}{7}+\frac{11z}{21}$

$\frac{5}{7}+\frac{2z}{7}=\frac{11z}{21}$

$\frac{5}{7}=\frac{5z}{21}$

$\frac{1}{7}=\frac{z}{21}$

$3=z$

der

der Werth von z in $y = \frac{2}{7}z + \frac{21}{7}$ substituirt,

$$y = \frac{22}{7} + \frac{6}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

der Werth von y und z in $x = \frac{96 - 6y - 4z}{10}$ substituirt

$$x = \frac{96 - 24 - 12}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

die Probe ist leicht zu machen.

Die 1. Anmerkung.

§. 305. Was §. 303. gesagt worden, gilt auch von dieser Aufgabe.

Die 2. Anmerkung.

§. 306. Die Auflösung der höheren Aequationen und undeterminirten Aufgaben hätten hier füglich auch Platz; allein da diese etwas schwer scheinen, und wir den Anfängern nur Milchspeise zu geben gesonnen, wodurch sie angelocket werden, die Schriften der grossen Mathematicker selber zu lesen; so versparen wir dieses, nebst noch mehr schweren Dingen auf ein andermal. Doch wollen wir indessen nur einen Vorschmack von undeterminirten Aufgaben geben.

Die 92. Aufgabe.

§. 307. **Es sollen 6 Gulden in 7 und 17 Kreuzerstücken bezahlt werden, daß es gerad aufgehet, wie viel muß man von jeder Sorte haben?**

Auflösung.

Von 7 Kreutzerstücken nehme man x
von 17 Kreutzerstücken y

$7x +$

$$7x+17y=360\text{ kr.}$$
$$7x=260-17y$$
$$x=51\tfrac{3}{7}-2\tfrac{3}{7}y$$

Hieraus ist klar, daß y so gros müsse angenommen werden, daß, wenn es mit $2\frac{3}{7}$ oder auch nur mit $\frac{3}{7}$ multiplicirt wird, $\frac{3}{7}$ mache, damit $\frac{3}{7}$, so bey 51 stehet, durch Subtrahiren aufgehe, und folglich x in ganzen Zahlen heraus komme.

Es sey $y=1$, so ist y mal $\frac{3}{7}$ $=\frac{3}{7}$
$=2$ $=\frac{6}{7}$
3 $=1\frac{2}{7}$
4 $=1\frac{5}{7}$
5 $=2\frac{1}{7}$
6 $=2\frac{4}{7}$
7 $=3$
8 $=3\frac{3}{7}$

Es kann also $y=1$ oder $=8$ seyn, im ersten Fall ist $x=51\frac{3}{7}--2\frac{3}{7}=49$, im andern Fall ist $x=51\frac{3}{7}--2\frac{3}{7}$.
$8=51\frac{3}{7}---19\frac{3}{7}=32$.

49 Siebener	32 Siebener	8 Siebenzehner
7	7	17
343	224	136
17 Siebenzehner	136	
360	360	

fährt man fort, wird man finden, daß y auch 15 seyn kann. Wenn aber $y=22$ gesetzt wird, komt zwar auch $\frac{3}{7}$, allein $2\frac{3}{7}$. 22 gibt $53\frac{3}{7}$, welches von $51\frac{3}{7}$ nicht abgezogen werden kann; darum wird der Fall unmöglich.

Anmerkung.

§. 308. Es gibt Fälle, die hieher gehören, da es nur einmal möglich ist, wodurch die Aufgabe determinirt wird.

Als

Als wenn vorſtehende Aufgabe auf zwey Gulden geſetzt würde.

Die 93. Aufgabe.

§. 309. Eine Geſellſchaft von Männern, Weibern, Junggeſellen und Jungfrauen, an der Zahl 30, verzehren mit einander 30 Gulden, ſo daß ein Mann zahlt 1 fl. 30 kr., ein Junggeſell 1 fl. 12 kr., eine Frau 45 kr., und eine Jungfer 30 kr. Wie viel Perſonen warens von jeder Gattung.

Auflöſung.

Es ſeyen Männer $= x$
Weiber $= y$
Junggeſellen $= z$
Jungfrauen $= 30 - x - y - z$

Wenn nun alles zu Kreuzern gemacht wird, ſo zahlen zuſammen

die Männer $90x$
die Weiber $45y$
die Junggeſellen $72z$
die Jungfrauen $900 - 30x - 30y - 30z$

$$1800 = 900 + 60x + 15y + 42z$$

3) $900 = 60x + 15y + 42z$

$$300 = 20x + 5y + 14z$$

$$300 - 5y - 14z = 20x$$

$$15 - \frac{y}{4} - \frac{7z}{10} = x$$

Man ſiehet leicht, daß für y eine Zahl müſſe angenommen werden, die ſich mit 4, und für z, die ſich mit 10 dividiren laſſe, das iſt, y kan ſeyn 4, 8, 12, 16, 20. ꝛc.

x aber

z aber 10, 20, 30, ꝛc. wäre aber $z = 20$, ſo wäre $\frac{7z}{10} = 14$, welches unmöglich, denn wenn y nur $= 4$ wäre, würde $\frac{y}{4} - \frac{7z}{10} = 15$, wodurch $x = 0$ würde: alſo iſt z nothwendig $= 10$; y aber kann auf mehrerley Art genommen werden.

	1	2	3	4	5	6
Junggeſellen	10	10	10	10	10	10
Weiber	4	8	12	16	20	4
Männer	7	6	5	4	0	0
Jungfern	9	6	3	0	0	6

Hieraus iſt erſichtlich, daß, 1, 2, 3 möglich, 4, 5, 6 aber unmöglich.

Die 94. Aufgabe.

§. 310. Vorſtehende Aufgabe allgemein aufzulöſen.

Auflöſung.

Das mit einander bezahlte Geld ſey $= m$
die Anzahl der Perſonen $= n$
Männer $= x$ und einer gibt $= a$
Weiber $= y$ und eine gibt $= b$
Junggeſellen $= z$ und einer gibt $= c$
Jungfern $= n - x - y - z$ eine gibt $= d$
alſo geben alle zuſammen
Männer $= ax$
Weiber $= by$
Junggeſellen $= cz$

Jung-

Jungfern $= dn - dx - dy - dz$

$dn + (a-d)x + (b-d)y + (c-d)z = m$

$(a-d)x = m - dn - (b-d)y - (c-d)z$

$$x = \frac{m-dn}{a-d} - \frac{(b-d)}{a-d}y - \frac{(c-d)}{a-d}z$$

Wie hieraus Regeln zu machen, zeigen so wohl die Buchstaben selber als der vorhergehende §. 309.

Anmerkung.

§. 311. Es wird insgemein dieses die Regula Cöcis oder Virginum genennet, die sich auf viele andere Fälle anwenden lässet, welche aus dem bisher gesagten leicht zu verstehen sind. Wenn nicht nur zwey, sondern mehrere Dinge von verschiedenem Werth zu mischen sind, daß sie einen bestimmten mittlern Werth haben sollen, kan man auch diese Regulam Virginum brauchen, wie folgende Aufgabe zeiget.

Die 95. Aufgabe.

§. 312. Man hat viererley Wein, die Maas zu 48 kr., zu 40 kr., zu 30 kr., und zu 16 kr., die man so mischen will, daß die Maas 30 kr. koste, wie viel muß von jedem genommen werden.

Auflösung.

Von dem 48 kr. Wein nimmt man x

\- - 40 - - - - y

\- - 30 - - - - z

\- - 16 - - - - $1-x-y-z$

Nemlich 1 bedeutet ein Maas, x aber ein Theil davon, und so y und z. Dahero

kostet

kostet x - - $48x$
y - - $40y$
z - - $30z$
$1-x-y-z$ $16-16x-16y-16x$

Zusammen - $36=16+32x+24y+14z$

$20-24y-14z=32x$

$\frac{5}{8}-\frac{3y}{4}-\frac{7z}{16}=x$

Hieraus ist klar, daß y und z nach Belieben angenommen werden können, doch erfordert die Beschaffenheit der Aufgabe, 1) daß y und z Brüche seyn müssen, weil sie von 1 abgezogen werden sollen. 2) Sie müssen solche Brüche seyn, daß wenn sie in die gefundene Gleichung gesetzt werden, von $\frac{5}{8}$ abgezogen werden können. 3) Sie müssen so seyn, daß sie mit x zusammen genommen weniger als 1 ausmachen, weil alle drey von 1 abgezogen werden sollen. Nimmt man dieses in Acht, wird man finden, daß sich diese Aufgabe auf gar vielerley Art auflösen lasse, die wir aber nicht alle, wegen der Menge, anführen wollen, sondern nur etliche.

Es sey $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{6}$, so ist $\frac{5}{8}-\frac{3}{4}:\frac{x}{4}-\frac{7}{16}:\frac{1}{6}=x=\frac{60}{96}-\frac{18}{96}-\frac{7}{96}=\frac{35}{96}=x$, wird nun $\frac{35}{96}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ von 1 abgezogen, so bekomt man den Theil vom 16 kr. Wein, wird seyn $\frac{7}{32}$.

Probe $\frac{35}{96}$ vom 48 kr. Wein, gibt $17\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$	40	-	10
$\frac{1}{6}$	30	-	5
$\frac{7}{32}$	16	-	$3\frac{1}{2}$
			36.

Es sey $y=\frac{1}{8}$, $z=\frac{1}{4}$, so ist $x=\frac{5}{8}-\frac{3}{32}-\frac{7}{32}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.

Ferner $1-\frac{5}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$, davon die Probe leicht zu machen.

Digitized by Google

Anderſt.

Die Anzahl der Maaſe vom
48 kr. Wein ſey $= x$, ſo koſten ſie $48x$
40 - $= y$ - $40y$
30 - $= z$ - $30z$
16 - $= v$ - $16v$

Zuſammen $48x+40y+30z+16v$.

Da nun dieſes ſo viel Maas ſind, als x, y, z, und v zuſammen betragt, und eine jede Maas 36 kr. gelten ſoll, ſo müſſen alle zuſammen gelten
$36x+36y+36z+36v$, folglich muß ſeyn

$$48x+40y+30z+16v = 36x+36y+36z+36v$$

$$12x+4y = 6z+20v$$

$$6x+2y = 3z+10v$$

$$y = 3z+10v-6x$$

$$y = \tfrac{3}{2}z+5v-3x$$

Hier können vor z, v und x alle nur erdenkliche Zahlen angenommen werden, um y zu beſtimmen, mit der einzigen Einſchränkung, daß ſich $3x$ von $\frac{3}{2}z+5v$ abziehen laſſe, und wenn man gar ganze Zahlen haben will, muß z eine gerade Zahl ſeyn.

Es ſey $x=2$, $z=2$, $v=1$, ſo iſt $y=3+5-6=2$
Von 48 kr. Wein 2 Maas gilt 96

40	2	80
30	2	60
16	1	16
	7	252

$$7)\frac{252}{36}$$

Die

Die 96. Aufgabe.

§. 313. Es sind 3 Krämer, einer hat 27 Ehlen Tuch, der andere 34, der dritte 41, gibt keiner die Ehle theurer als der andere, gleichwol, da sie ihr sämlich Tuch verkauft, hat keiner mehr Geld gelößt, als der andere. Wie ist dieses zugegangen?

Auflösung.

Weil einer für die Ehle bekommen, was der andere, so ist die Sache nicht möglich, es sey dann, daß sie etlichmal daran verkauft, als den ersten Tag theurer als den folgenden, da denn der erste Krämer viel Ehlen theuer und wenig wohlfeil, der andere weniger Ehlen theuer und mehr wohlfeil, und der letzte am wenigsten Ehlen theuer und am meisten wohlfeil verkauft hat.

Sie haben den ersten Tag die Ehle verkauft für m, den andern Tag für n

Der erste hat für den theuren Preis $= m$ verkauft x Ehlen, so hat er für den wohlfeilen verkauft $27 - x$ folglich hat er gelöst $mx + 27n - nx = (m-n)x + 27n$

Der zweyte für m die Ehlen y, für n die Ehlen $34 - y$ hat also gelöst

$$my + 34n - ny = (m-n)y + 34n$$

Der dritte für m, die Ehlen z, für n, die Ehlen $41 - z$, hat also gelöst

$$mz + 41n - nz = (m-n)z + 41n$$

Es ist demnach vermöge der Aufgabe

$$(m-n)x + 27n = (m-n)y + 34n$$

$$(m-n)x = (m-n)y + 7n$$

$$x = y + \frac{7n}{m-n}$$

$$\frac{(m-n)y+34n=(m-n)z+41n}{(m-n)y=(m-n)z+7n}$$

$$y=z+\frac{7n}{m-n}$$

m und n sind nicht angegeben, werden also nach Belieben angenommen; will man aber keine Brüche haben, so müssen sie so angenommen werden, daß $\frac{n}{m-n}$ mit 7 multiplicirt aufgehe.

Es seye $m=2$, $n=1$, so ist $\frac{n}{m-n}=\frac{1}{2-1}$

Folglich $\frac{7n}{m-n}=7$ oder $m=8$, $n=1$, so ist

$$\frac{n}{m-n}=\frac{1}{8-1}=\frac{1}{7} \text{ und } \frac{7n}{m-n}=1.$$

Ist nun $\frac{n}{m-n}=1$, so ist

$$x=y+7,\ y=z+7,\ x=z+14$$

Aus z läßt sich hernach x und y bestimmen und können alle Zahlen unter 13 dafür angenommen werden; 13 aber kann es nicht seyn, denn sonst würde $x=13+14=27$, in welchem Fall der erste den ersten Tag all sein Tuch würde verkauft haben, und den andern Tag nichts mehr übrig behalten.

Es

Es ſey z = 1, ſo iſt x = 15, y = 8.

1. T.	15 T. p. 2	=	30		8 T. 2	=	16		1 T. 2	=	2
2. T.	12 T. p. 1	=	12	2)	26 p. 1	=	26	3)	40 1	=	40
	27		42		34		42		41		42

§. 314. Damit man Gelegenheit habe, ſich ſelbſten in Formirung der Aequinationen und Reductionen zu üben, ſo wollen wir noch etliche Exempel ohne Auflöſung beyſetzen.

1) Es dinget jemand einen Arbeiter auf 12 Wochen oder 84 Tage, und verſpricht ihm dieſe Tage über die Koſt, und täglich, wenn er arbeitet, 18 kr.; arbeitet er aber nicht, ſo ſoll ihme der Arbeiter täglich 6 kr. für Koſt bezahlen. Da ſie nach verfloſſener Zeit mit einander rechnen, iſt keiner dem andern nichts ſchuldig, wie viel Tage hat er gearbeitet und wie viel Tage iſt er müßig gegangen? 63 Tage müßig gegangen, und 21 Tag gearbeitet.

2) In einer Geſellſchaft waren etliche Jungfern, die gefragt wurden, wie viel ihrer ſeyen? Sie gaben zur Antwort: Es ſind eben ſo viel Junggeſellen bey uns, als wir ſind, und wir alle zuſammen ſind dreymal ſo viel über 20, als wir wir allein unter 20 ſind. Es waren 16.

3) Einer hat etliche Paar Tauben, will ihm einer für 4 Paar geben 1 fl. Es komt ein anderer, bezahlt für 3 Paar 1 fl., gewinnt alſo 2 fl., da er vorhin nur 1 fl. gewonnen, wie viel hat er? Antwort: 12.

4) Ein Bettler hat etliche Kreutzer, erbettelt eben ſo viel dazu, kauft aber für 8 kr. Brod. Des andern Tags erbettelt er wieder ſo viel, als er noch hatte, das iſt, verdoppelt ſeinen Reſt, und kauft für 16 kr. Fleiſch. Den dritten Tag erbettelt er wieder ſo viel, als ſein Reſt war, trinkt aber ein Maas 6 Batzen Wein, und damit war ſein Geld ausgegeben, wie viel hatte er Anfangs? Antw. 11 kr.

Digitized by Google

5) Ein Metzger kauft eine Anzahl Ochsen; die Hälfte davon schlägt er bey den Bauern ein, und ein Drittel an einem andern Ort, den vierten Theil so viel, als er am letztern Ort gelassen, nimmt er nach Haus, den Rest verkauft er, und zwar jeden Ochsen um so viel Gulden, als er Ochsen verkauft, und erlößt so viel Gulden, als er anfänglich Ochsen gekauft, wie viel Ochsen warens anfänglich? Antw. 144.

6) Ein Wechsler hat zweyerley Münzen. Von der ersten Sorte gehen a Stück auf 1 Rthlr. Von der zweyten b Stück. Es will aber jemand c Stück für 1 Rthlr. haben. Wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben. Die Anzahl von der ersten Sorte $x = \frac{(b-c)a}{b-a}$

7) Zwo Personen schießen zusammengenommen 100 Rthlr. zu einem gewissen Unternehmen her. Der erste läßt sein Geld 3 Monat lang, der zweyte aber nur 2 Monat stehen, und ein jeder bekommt mit Capital und Gewinnst 99 Thl. Wie viel hat jeder eingelegt? Der erste 45 Rthlr. Der zweyte 55.

8) Es hat jemand 1000 fl. $= a$ auf Zins ausgelehnt, daß der Zins immer wieder zu Capital geschlagen werde, nach drey Jahren hat er 1728 fl. ($= b$), wie viel pro Cent hat er des Jahrs bekommen? Antwort: 20. oder $x = 100\left(\sqrt[3]{b:a} - 1\right)$ überhaupt, wenn die Jahre $= n$, so ist $x = 100\left(\sqrt[n]{b:a} - 1\right)$

9) Eine Compagnie Soldaten werden, wegen einer erstiegenen Vestung, dergestalt belohnt, daß der erste eine gewisse Summe Gelds bekomt, der zweyte etwas weniger, der dritte wieder um so viel weniger, u. s. w. Wie das Geld ausgetheilet worden, konnten zwey, wegen Blessuren, nicht gegenwärtig seyn. Man gab daher ihren Antheil

theil ihren Cammeraden. Die ſteckten ihr eigenes und ihrer Cameraden zuſammen in einen Sack, und wußten bey ihrer Heimkunft nicht mehr, was jedem gebührte. Der erſte hatte für ſich und ſeinen Cammeraden 92 fl. und wußte noch, daß er der zweyte und ſein Cammerad der ſiebende geweſen. Der andere brachte 71 fl. heim, und wußte, daß er der 11te, ſein Cammerad aber der 4te geweſen? Was gebühret jedem? Antwort: dem 2ten 54 fl. 45 kr. dem 7den 37 fl. 15 kr. dem 4ten 47 fl. 45 kr. und dem 11ten 23 fl. 15 kr.

10. Einer kauft ein Pferd für einige Thaler, verkauft daſſelbe wieder für 119. Thlr. und gewinnt darann ſo viel pro Cent, als das Pferd gekoſtet hatte. Wie theuer war es alſo eingekauffet? 70. Thlr.

11) Zwey Arbeiter arbeiten um gleichen Taglohn, der erſte 51 Tage, der andere 63 Tage, ſie laſſen ſich theils mit Frucht theils mit Geld bezahlen, der erſte bekomt 3 Malter Frucht, und 4 fl. 18 kr. Geld, der andere 4 Malter Frucht und 3 fl. 24 kr. Geld, wie hoch iſt das Malter Frucht gerechnet worden? Antwort: 6 fl. 30 kr.

12) Es läßt jemand einen Brunnen graben, verſpricht dem Meiſter dafür 255 fl. mit dem Beding, wenn er ihn 50 Schuhe tief graben müſſe; ſolte er aber denſelben mehr oder weniger tief zu graben nöthig haben, ſo wolle er ihm auch dergeſtalt mehr oder weniger zahlen, daß er für den zweyten Schuh zweymal, für den dritten dreymal, ꝛc. ſo viel geben wolle, als für den erſten, nun bekam der Meiſter 93 fl. wie viel Schuh tief hat er gegraben? Antw. 30.

13) Ein Kaufmann bietet ein Stück Tuch von 36 Ehlen für 120 fl., der Käufer markt ſo viel ab, als er wirklich für 4 Ehlen zahlt, wie viel gibt er für das Stück Tuch? Antwort: 98 fl.

14.)

Digitized by Google

14) Cupido beklagte ſich bey ſeiner Mutter, die Muſen haben ihm ſeine Aepfel genommen. Clio habe ihm genommen ein Fünftel, Euterpe ein Zwölftel, Thalia ein Achtel, Melpomene ein Zwanzigſtel, Erato ein Siebentel, Terpſychore ein Viertel, Polymnie 30, Uranie 105, und Calliope 360, und nun habe er nur noch 5 Aepfel, wie viel hatte er? Antwort: 3360.

ENDE.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google